Subject .   Year.   Month.   Day.

«هو العلیم»

وزارت علوم تحقیقات و فناوری

دانشکده و آموزشکده فنی مشهد

نام درس :

کنترل دیجیتال

نام استاد :

مهندس مجید شرکاء

نوشته شده توسط :

غلامحسین منظوری

مهر ماه ۱۳۹۱

ARSH

«هوالعلیم»

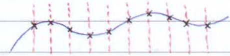
«کنترل دیجیتال»

تبدیل Z :

$$X(z) = \mathcal{Z}[x(t)] \longrightarrow Z[x(kT)] \longrightarrow Z[x(k)]$$

این برای متغیر زمانی است   برای شمارش استفاده می‌شود

البته فراموش نشود که این مقادیر به ترتیب است و در حالت $x(t)$ زمانی است ولی پیوسته نیست، بلکه نمونه‌گیری ما از سیگنال گسسته است.



$$\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(k)\, z^{-k}$$

یک عدد مختلط است

* مصرف‌کننده‌های انرژی:
  - Passive : سیستم‌های غیرفعال که به مرور انرژی آن تخلیه می‌شود و در انتها به صفر می‌رسد.
  - Active : سیستم‌های فعال که در این سیستم‌ها دامنه انرژی به ∞ میل می‌کند و به عبارتی تولیدکننده انرژی می‌باشد.

* شعاع همگرایی ← $|Z| < R$ در این صورت سری فوق همگراست

* قطب‌ها و صفرها:

$$X(z) = \frac{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \dots + b_m}{z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n} \longrightarrow \frac{b_0 (z-z_1)\cdots(z-z_n)}{(z-p_1)\cdots(z-p_n)} \; ; \; z_i \text{ (صفرها)} \quad p_i \text{ (قطب‌ها)}$$

مثال: تبدیل Z توابع ذیل را محاسبه کنید:

$$1)\; x(t) = \begin{cases} 1(t) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

$$X(z) = \mathcal{Z}[1(t)] \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} 1 z^{-k} \longrightarrow 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots + z^{-k} \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

شعاع همگرایی $|Z| > 1$

۲) $x(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ $\quad X(z) = Z[t] \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT) z^{-k} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} kT z^{-k} \rightarrow$

$$T \sum_{k=0}^{\infty} k z^{-k} \rightarrow T \frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2} = \frac{Tz}{(z-1)^2}$$

۳) $x(k) = \begin{cases} a^k & t \geq 0 \quad (k \geq 0) \\ 0 & t < 0 \quad (k < 0) \end{cases}$ $\quad X(z) = Z[a^k] \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} \rightarrow 1 + a z^{-1} + a^2 z^{-2} + \dots$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (a z^{-1})^k \rightarrow \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{az}{az - 1}$$

٤) $x(t) = \begin{cases} e^{-at} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ $\quad X(z) = Z[e^{-at}] \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a^{-akT} z^{-k} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (e^{aT} z^{-1})^k$

$$\frac{1}{1 - e^{-aT} z^{-1}} = \frac{z}{z - e^{-aT}}$$

۵) $x(t) = \begin{cases} \sin \omega t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ $\quad X(z) = Z[\sin \omega t] \rightarrow Z\left[\frac{1}{2j}\left(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}\right)\right] \rightarrow$

(Sinusoidal)

$$\frac{1}{2j}\left(\frac{1}{1 - e^{j\omega T} z^{-1}} - \frac{1}{1 - e^{-j\omega T} z^{-1}}\right) \rightarrow \frac{1}{2j} \frac{(e^{j\omega T} - e^{-j\omega T}) z^{-1}}{1 - (e^{j\omega T} + e^{-j\omega T}) z^{-1} + z^{-2}} \rightarrow$$

$$\frac{z^{-1} \sin \omega T}{1 - 2 z^{-1} \cos \omega T + z^{-2}} \rightarrow \frac{z \sin \omega T}{z^2 - 2 z \cos \omega T + 1}$$

* جدول تبدیل لاپلاس وتبدیل Z :

سیگنال زمان	تبدیل Z	تبدیل لاپلاس
$\delta(t) = \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	1	—

(Dirishlet) تابع گسسته

سیگنال زمان	تبدیل Z	تبدیل لاپلاس
$u(t) \rightarrow 1(t)$	$\dfrac{1}{1-z^{-1}}$	$\dfrac{1}{s}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$	$\dfrac{1}{s+a}$
$t1(t)$	$\dfrac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}}$	$\dfrac{1}{s^{2}}$
$t^{2}1(t)$	$\dfrac{T^{2}z^{-1}(1-z^{-1})}{(1-z^{-1})^{3}}$	$\dfrac{2}{s^{3}}$
$t^{3}1(t)$	$\dfrac{T^{3}z^{-1}(1+4z^{-1}+z^{-2})}{(1-z^{-1})^{3}}$	$\dfrac{6}{s^{4}}$
$1-e^{-at}$	$\dfrac{(1-e^{-aT})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-aT}z^{-1})}$	$\dfrac{a}{s(s+a)}$
$e^{-at}-e^{-bt}$	$\dfrac{e^{-aT}-e^{-bT}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}$	$\dfrac{b-a}{(s+a)(s+b)}$
te^{-at}	$\dfrac{Te^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^{2}}$	$\dfrac{1}{(s+a)^{2}}$
$(1-at)e^{-at}$	$\dfrac{1-(1+aT)e^{-aT}z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^{2}}$	$\dfrac{s}{(s+a)^{2}}$
$t^{2}e^{-at}$	$\dfrac{T^{2}e^{-at}(1+e^{-aT}z^{-1})z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})^{3}}$	$\dfrac{s}{(s+a)^{3}}$
$at-1+e^{-at}$	$\dfrac{((aT-1+e^{-aT})+(1-e^{-aT}z^{-1}-aTe^{-aT})z^{-1})z^{-1}}{(1-z^{-1})^{2}(1-e^{-aT}z^{-1})}$	$\dfrac{a^{2}}{s^{2}(s+a)}$
$\sin\omega t$	$\dfrac{z^{-1}\sin\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$	$\dfrac{\omega}{s^{2}+\omega^{2}}$
$\cos\omega t$	$\dfrac{1-z^{-1}\cos\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$	$\dfrac{s}{s^{2}+\omega^{2}}$

* خواص تبدیل Z : $x(k) = a\,f(k) + b\,g(k) \longrightarrow X(z) = a\,F(z) + b\,G(z)$

۱) خطی بودن:

با فرض: $F(z) = \mathcal{Z}[f(k)]$ ، $G(z) = \mathcal{Z}[g(z)]$

۲) ضرب در a^k یا مقیاس‌سازی: $\mathcal{Z}[a^k x[k]] = X(a^{-1}z) \longrightarrow X(\frac{z}{a})$

۳) شیفت زمانی:

$$\mathcal{Z}[x(t-nT)] = z^{-n} X(z)$$

$$\mathcal{Z}[x(t+nT)] = z^{n}\left(X(z) - \sum_{k=0}^{n-1} x(kT)\, z^{-k}\right)$$

Backword Difference

$$\nabla x(k) = x(k) - x(k-1)$$

* اختلاف یا تفاضل پس‌رو:

$$\mathcal{Z}[\nabla x(k)] \longrightarrow \mathcal{Z}[x(k) - x(k-1)] \longrightarrow X(z) - z^{-1}X(z) \longrightarrow (1 - z^{-1})X(z)$$

$$\nabla^2 x(k) = \nabla[\nabla x(k)] \longrightarrow \nabla(x(k) - x(k-1)) \longrightarrow x(k) - x(k-1) - x(k-1) + x(k-2)$$

$$\mathcal{Z}[\nabla^2 x(k)] \longrightarrow X(z) - 2z^{-1}X(z) + z^{-2}X(z) \longrightarrow X(z)(1 - 2z^{-1} + z^{-2}) \longrightarrow X(z)(1 - z^{-1})^2$$

بهمین ترتیب خواهیم داشت $\longrightarrow \mathcal{Z}[\nabla^m x(k)] = (1 - z^{-1})^m X(z)$

Forword Difference

* اختلاف یا تفاضل پیش‌رو:

$$\Delta x(k) = x(k+1) - x(k)$$

$$\mathcal{Z}[\Delta x(k)] \longrightarrow \mathcal{Z}[x(k+1)] - \mathcal{Z}[x(k)] \longrightarrow zX(z) - zx(0) - X(z) \longrightarrow X(z)(z-1) - zx(0)$$

وضعیت مشخص نیست

$\Delta^2 x(k) = \Delta[\Delta x(k)] \rightarrow \Delta[x(k+1)-x(k)] \rightarrow x(k+2)-x(k+1)-x(k+1)+x(k) -$

$x(k+2)-2x(k+1)+x(k)$

$Z[\Delta^2 x(k)] \rightarrow z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)-2(zX(z)-zx(0)+X(z)) \rightarrow$

$(z-1)^2X(z)-z(z-1)x(0)-z\Delta x(0)$ که در این معادله $\Delta x(0) = x(1)-x(0)$

بهمین ترتیب خواهیم داشت $\rightarrow Z[\Delta^m x(k)] = (z-1)^m X(z) - z\sum_{j=0}^{m-1}(z-1)^{m-j-1}\Delta^j x(0)$

* قضیه جابجائی مختلط تبدیل سیگنال $e^{-at}x(t)$ برحسب تبدیل Z از $x(t)$؛

Complex traslation theorem

$Z[e^{-at}x(t)] \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)z^{-k}e^{-akT} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)(ze^{aT})^{-k} \rightarrow X(ze^{aT})$

برای نمونه داریم؛ $Z(\sin\omega t) \rightarrow \frac{z^{-1}\sin\omega T}{1-2z^{-1}\cos\omega T+z^{-2}}$

$Z(e^{-at}\sin\omega t) \rightarrow \frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T+e^{-2aT}z^{-2}}$

* قضیه مقدار اولیه؛

اگر تبدیل Z برای $x(t)$ بصورت $X(z)$ وجود داشته باشد $Z[x(t)]=X(z)$ و حد $\lim_{z\to\infty} X(z)$ وجود داشته باشد؛ آنگاه

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

اثبات؛

$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \rightarrow x(0)+x(1)z^{-1}+\dots \rightarrow \lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$

برای نمونه داریم؛ $X(z) = \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} \rightarrow x(0) = \lim_{z\to\infty} \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})} = 0$

(این تابع تبدیل $(x(t)=1-e^{-t})$ با پریود نمونه برداری (T) است و در $(t=0)$ مقدارش صفر است)

Final Value theorem

* قضیه مقدار نهایی:

با فرض صفر بودن $x(k)$ برای $k<0$ و پایداری $X(z)$ (قطبها درون دایره واحد باشد)

در این صورت

$$\lim_{k\to\infty} x(k) = \lim_{z\to 1} \left((1-z^{-1})X(z)\right)$$

اثبات:

$$Z[x(k)] \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} \quad ; \quad Z[x(k-1)] \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1) z^{-k}$$

$$\lim_{z\to 1} \left(\sum_{k=0}^{\infty} x(k) z^{-k} - \sum_{k=0}^{\infty} x(k-1) z^{-k}\right) \rightarrow \lim_{z\to 1} \left(X(z) - z^{-1}X(z)\right) \rightarrow \lim_{z\to 1} \left((1-z^{-1})X(z)\right)$$

* اما در سمت چپ چنین است که داریم:

$$\sum_{k=0}^{\infty} x(k) - x(k-1) \rightarrow x(0) - x(-1) + x(-1) + x(0) + x(2) - x(3) + \dots \rightarrow x(\infty) = \lim_{k\to\infty} x(k)$$

برای نمونه داریم

$$X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} \rightarrow x(\infty) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})X(z) \rightarrow 1-0=1$$

(اما اصل سیگنال در حوزه زمان این بوده است که داریم:

$$x(t) = 1 - e^{-at} \rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t) = 1$$

مثال: برای تابع داده شده موجود مقادیر اولیه و مقدار نهایی را محاسبه کنید:

$$x(k) - a\,x(k-1) = 1(k) \quad \begin{cases} x(k) = 0 & k<0 \\ |a|<1 \end{cases}$$

* در ابتدا از طرفین تبدیل Z می‌گیریم:

$$* \; X(z) - a z^{-1} X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \rightarrow X(z) = \frac{1}{1-z^{-1}} \cdot \frac{1}{1-az^{-1}} \rightarrow$$

$$X(z) = \frac{1}{1-a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right) \rightarrow Z \text{ عکس تبدیل } \rightarrow x(k) = \frac{1}{1-a}(1-a^{k+1})$$

$$x(k) \begin{cases} x(0) = \lim_{z\to\infty} X(z) \rightarrow x(0) = 1 \\ x(\infty) = \lim_{z\to 1} (1-z^{-1})X(z) \rightarrow x(\infty) = \dfrac{1}{1-a} \end{cases}$$

نکته: فراموش نشود برای محاسبه مقدار نهایی کافیست تابع $X(z)$ را در $(1-z^{-1})$ ضرب کرده و سپس حد آن را که ($z \to 1$) بدست آوریم.

Subject . Year. Month. Day.

* کانولوشن درحوزهٔ حقیقی :

1) $x_1(t), x_2(t) = 0$ for $t<0$; 2) $Z[x_1(t)]$, $Z[x_2(t)]$ (وجود داشته باشد)

دراینصورت داریم :

$$X_1(Z) \cdot X_2(Z) = Z\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT-hT)\right]$$

اثبات :

$$*\, Z\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT-hT)\right] \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT-hT)z^{-1} \longrightarrow$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT-hT)z^{-k} \longrightarrow m=k-h \longrightarrow Z\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(hT)x_2(kT-hT)\right] \longrightarrow$$

(این تابع برای $h<k$ صفر می باشد)

$$\sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)z^{-h}\sum_{m=-h}^{\infty} x_2(mT)z^{-m} \longrightarrow \text{for } m<0 \longrightarrow x_2(mT)=0 \longrightarrow$$

$$Z\left[\sum_{h=0}^{k} x_1(kT)x_2(kT-hT)\right] \longrightarrow \sum_{h=0}^{\infty} x_1(hT)z^{-h}\sum_{m=0}^{\infty} x_2(mT)z^{-m} \longrightarrow X_1(Z)\cdot X_2(Z)$$

* کانولوشن درحوزهٔ مختلط :

$$\text{If}\begin{cases} x_1(k)=0 \quad k<0 \longrightarrow X_1(Z)=Z[x_1(k)] \quad |Z|>R_1 \\ x_2(k)=0 \quad k<0 \longrightarrow X_2(Z)=Z[x_2(k)] \quad |Z|>R_2 \end{cases}$$

دراینصورت خواهیم داشت :

$$Z[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\oint_c \zeta^{-1}X_2(\zeta)X_1(\zeta^{-1}Z)\,d\zeta \qquad R_2<|\zeta|<\frac{|Z|}{R_1}$$

اثبات :

$$*\, x_2(k) = \frac{1}{2\pi j}\oint_c X_2(Z)Z^{k-1}\,dZ \longrightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_c X_2(\zeta)\zeta^{k-1}\,d\zeta \qquad |Z|>R \longrightarrow$$

$$Z[x_1(k)x_2(k)] = \frac{1}{2\pi j}\sum_{k=0}^{\infty}\oint_c X_2(\zeta)\zeta^{k-1}x_1(k)Z^{-k}\,d\zeta \longrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c \zeta^{-1} X_2(\zeta)\sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)\,(\zeta^{-1} z)^{-k}\, d\zeta \rightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_c \zeta^{-1} X_2(\zeta)\, X_1(\zeta^{-1} z)\, d\zeta$$

Parseval theorem

* قضیه پارسوال :

با تعریف مشابه قضیه کانولوشن مختلط اگر در معادله کانولوشن مختلط $|Z|=1$

$$Z[x_1(k)x_2(k)]\Big|_{|Z|=1} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k)\,x_2(k) \rightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_c \zeta^{-1} X_2(\zeta)\, X_1(\zeta^{-1})\, d\zeta$$

اگر قرار دهیم $x_1(k)=x_2(k)=x(k)$ در این صورت خواهیم داشت:

$$x(k)=\sum_{k=0}^{\infty} x^2(k) \rightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_c \zeta^{-1} X(\zeta)\, X(\zeta^{-1})\, d\zeta \rightarrow \frac{1}{2\pi j}\oint_c z^{-1} X(z)\, X(z^{-1})\, dz$$

* عکس تبدیل Z :

برای آن ٤ روش موجود است که هر یک از آنها را به شرح و با یک مثال بیان می کنیم:

۱) تقسیم مستقیم: اگر $X(z)$ را بصورت سری توانی بسط دهیم، داریم:

$$X(Z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} \rightarrow x(0)+x(1)z^{-1}+\dots+x(m)z^{-m}+\dots$$

برای نمونه داریم:

$$X(Z)=\frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)} \rightarrow \frac{10z^{-1}+5z^{-2}}{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}$$

$$10z^{-1}+5z^{-2} \;\Big|\; \frac{1-1.2z^{-1}+0.2z^{-2}}{10z^{-1}+17z^{-2}+18z^{-3}+18.4z^{-4}+18.734z^{-5}}$$

* در این تقسیم واضح است که نشان می دهد مقادیر از ١٠ شروع شده و در ١٩ ثابت می شود

۲) روش محاسباتی (کامپیوتری):

برای نمونه می خواهیم برای $X(z)$ عکس تبدیل لاپلاس را محاسبه کنیم:

$$X(Z)=\frac{10z+5}{(z-1)(z-0.2)}$$

یادآوری: عکس تبدیل Z یک تابع، معادل بدست آوردن پاسخ ضربه $\delta(t)$ ، krone cleer) به تابع انتقال است.

$$X(z) = \frac{10z+5}{z^2-1.2z+0.2} \longrightarrow X(z)(z^2-1.2z+0.2) = (10z+5)\delta(t) \longrightarrow$$

$$x(k+2) - 1.2x(k+1) + 0.2x(k) = 10\delta_0(k+1) + 5\delta_0(k)$$

با فرض اینکه $\delta_0(-2) = \delta_0(-1) = 0$ در این صورت برای $k=-2$ داریم:

$x(-2) = x(-1) = 0$

$$x(0) - 1.2x(-1) + 0.2x(-2) = 10\delta_0(-1) + 5\delta_0(-2) \longrightarrow x(0) = 0$$

$$k=-1 \longrightarrow x(1) - 1.2x(0) + 0.2x(-1) = 10\delta_0(0) + 5\delta_0(-1) \longrightarrow x(1) = 10$$

به همین ترتیب داریم $\longrightarrow x(2) = 17$ ، $x(3) = 18.4$ و ...

۳) بسط به کسرهای جزئی:

برای نمونه برای تابع $X(z)$ عکس تبدیل Z آن را محاسبه می کنیم.

$$1)\ X(z) = \frac{z^{-1}}{1-az^{-1}} \longrightarrow X(z) = z^{-1}\frac{1}{1-az^{-1}} \longrightarrow z^{-1}Y(z) ; \frac{1}{1-az^{-1}}$$

از آنجا که می دانیم عکس تبدیل Z عبارت $\frac{1}{1-az^{-1}}$ معادل ، $(x(k) = a^{k-1})$ است لذا:

$$Z^{-1}(Y(z)) = y(k) = a^k \qquad Z^{-1}(X(z)) = a^{k-1}$$

$$2)\ X(z) = \frac{10z}{(z-1)(z-0.2)}$$

در این تابع اول تبدیل به Z^{-1} می شود که در این صورت داریم:

$$Z[x(k)] = X(z) = z\left(\frac{12.5}{z-1} - \frac{2.5}{z-0.2}\right) \longrightarrow X(z) = z^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = 1^k$$

$$Z^{-1}\left(\frac{1}{1-0.2z^{-1}}\right) = 0.2^{k-1} \longrightarrow x(k) = 12.5(1-(0.2)^{k-1})$$

$$3)\ X(z) = \frac{(1-e^{-aT})z}{(z-1)(z-e^{-aT})} \longrightarrow X(z) = z\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z-e^{-aT}}\right) \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

$$Z^{-1}(X(z)) = 1-e^{-akT}$$

4) $X(z) = \dfrac{z+2}{(z-2)z^2} \rightarrow X(z) = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z} \rightarrow \dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}} - z^{-2} - z^{-1} \rightarrow$

$Z^{-1}\left(\dfrac{1}{1-2z^{-1}}\right) = 2^k \rightarrow Z^{-1}\left(\dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right) \begin{cases} a^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$

$Z^{-1}(z^{-2}) \begin{cases} 1 & k=2 \\ 0 & k \neq 2 \end{cases} \qquad Z^{-1}(z^{-1}) \begin{cases} 1 & k=1 \\ 0 & k \neq 1 \end{cases}$

$x(k) \begin{cases} 0 & k=0 \\ 1 & k=1 \\ 1 & k=2 \\ 2^{k-1} & k \geq 2 \end{cases}$

5) $X(z) = \dfrac{2z^3+z}{(z-2)^2(z-1)} \rightarrow X(z) = z\left(\dfrac{9}{(z-2)^2} - \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{3}{z-1}\right) \rightarrow$

$X(z) = \dfrac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} - \dfrac{1}{1-2z^{-1}} + \dfrac{3}{1-z^{-1}} \rightarrow$

$Z^{-1}\left(\dfrac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}\right) = k(2^{k-1})$ ، $Z^{-1}\left(\dfrac{1}{1-2z^{-1}}\right) = 2^k$ ، $Z^{-1}\left(\dfrac{1}{1-z^{-1}}\right) = 1$

$x(k) \begin{cases} 2 & k=0 \\ 9k(2^{k-1}) - 2^k + 3 & k \geq 1 \end{cases}$

* البته این مثال آخر را می توان از روش دیگر حل کرد که داریم؛

6) $X(z) = 2 + \dfrac{10z^2 - 15z + 8}{(z-2)^2(z-1)} \rightarrow X(z) = 2 + \dfrac{9z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2} + \dfrac{2z^{-1}}{1-2z^{-1}} + \dfrac{3z^{-1}}{1-z^{-1}}$

$Z^{-1}(2) \begin{cases} 2 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases} \qquad Z^{-1}\left(\dfrac{z^{-1}}{(1-2z^{-1})^2}\right) \begin{cases} k2^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$

$Z^{-1}\left(\dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right) \begin{cases} 2^{k-1} & k \geq 1 \\ 0 & k \leq 1 \end{cases} \qquad Z^{-1}\left(\dfrac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right) \begin{cases} 1 & k \geq 1 \\ 0 & k \leq 0 \end{cases}$

۵۷) $X(z) = \dfrac{z^3+4z}{(z^2-2z+2)(z-1)} \rightarrow Y(z) = \dfrac{X(z)}{z} \rightarrow \dfrac{7}{z-1} + \dfrac{-7z+8}{z^2-2z+2} \rightarrow \dfrac{7}{1-z^{-1}} - \dfrac{7(1-\frac{8}{7}z^{-1})}{1-2z^{-1}+2z^{-2}}$

با توجه به رابطه

$$Z[e^{-akT}\cos\omega t] = \frac{1-e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T + e^{-2aT}z^{-2}}$$

$$Z[e^{-akT}\sin\omega t] = \frac{e^{-aT}z^{-1}\sin\omega T}{1-2e^{-aT}z^{-1}\cos\omega T - e^{-2aT}z^{-2}}$$

If $X_1(z) = \dfrac{1-\frac{8}{7}z^{-1}}{1-2z^{-1}+2z^{-2}} \rightarrow \dfrac{1-z^{-1}}{1-2z^{-1}+2z^{-2}} - \dfrac{1}{7}\dfrac{z^{-1}}{1-2z^{-1}+2z^{-2}}$

$e^{-aT} = \sqrt{2}$ به عبارتی $(e^{-aT}\cos\omega T = 1$ ؛ $e^{-2aT} = 2)$ $\leftarrow$ اگر داشته باشیم

$\omega = \frac{\pi}{4}$ ؛ $\cos\omega T = \sin\omega T = \frac{1}{2}$

$*\ X_1(z) = \dfrac{1-\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1-2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}+2z^{-2}} - \dfrac{1}{7}\dfrac{\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}}{1-2\sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}+2z^{-2}} \rightarrow Z^{-1}(X_1(z)) = e^{-akT}\cos\omega T - \frac{1}{7}e^{-akT}\sin\omega$

$(\sqrt{2})^k\cos\frac{k\pi}{4} - \frac{1}{7}(\sqrt{2})^k\sin\frac{k\pi}{4}$ ؛ نهایتاً $Z^{-1}(X(z)) = z^{-1}\left(\dfrac{7}{1-z^{-1}} - 7X_1(z)\right) \rightarrow$

$$Z^{-1}(X(z)) = 7 - 7\left[(\sqrt{2})^k\cos\frac{(k\pi)}{4} - \frac{1}{7}(\sqrt{2})^k\sin\frac{(k\pi)}{4}\right]$$

* مروری بر روابط آنالیز مختلط:

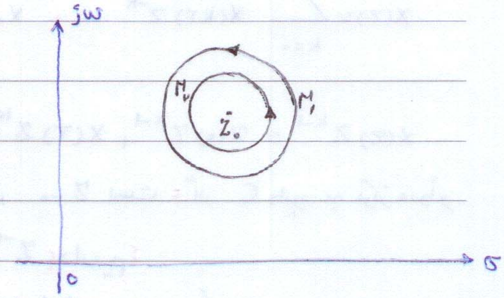
فرض کنید z_0 یک نقطه منفرد (قطب) از $F(z)$ باشد؛ می‌توان نشان داد که عدد مثبت چون r_1 وجود دارد که $F(z)$ در هر نقطه از محدوده $(0<|z-z_0|<r_1)$ تحلیلی باشد. اگر دایره به شعاع r_1 به مرکز z_0 را (Γ_1) بنامیم و نشان دهیم و (Γ_2) را هر دایره‌ای به مرکز z_0 و به شعاع $(r_2<r_1)$ در نظر بگیریم بسط سری لوران (Laurent) از $F(z)$ حول قطب (z_0 و z) به این صورت می‌توان نمایش داد:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{(z-z_0)^n}$$

که در آن ضرایب a_n ، b_n از این انتگرالها بدست می‌آیند:

$$a_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_1}\frac{F(z)}{(z-z_0)^{n+1}}dz \qquad n=0,1,2,\dots$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_2}\frac{F(z)}{(z-z_0)^{-n+1}}dz \qquad n=0,1,2,\dots$$



ضمن اینکه می‌توان دید که:

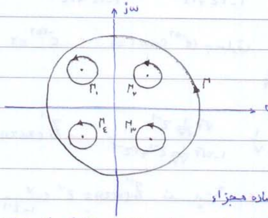
$$b_1 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma_2}F(z)dz$$

ب) می‌توان نشان داد که مقدار انتگرال فوق (b_1) برای هر مسیر بسته Γ که جایگزین مسیر قبلی شود، بگونه‌ای که $F(z)$ بروی Γ و درون آن تحلیلی باشد، به جزء در ($z-z_0$) تغییر نخواهد کرد؛ مقدار انتگرال مستقل از مسیر است.

اینک با توجه به قضیه (Cauchy _ Goursat) داریم

$$\oint_{\Gamma} F(z)\,dz - \oint_{\Gamma_2} F(z)\,dz = 0 \longrightarrow b_1 = \frac{1}{2\pi j}\oint_{\Gamma} F(z)\,dz$$

b_1 را باقیمانده (residue) $F(z)$ در نقطه z_0 می‌نامیم؛



* اینک اگر مسیر بسته Γ مقدار m قطب ساده مجزا ($z_1, \dots, z_m$) را دربرگیرد، که در آن Γ_1 تا Γ_m مسیرهای بسته‌ای هستند که هر یک تنهایی قطبهای z_1 تا z_m را دربرمی‌گیرند

$$\oint_{\Gamma} F(z)\,dz - \oint_{\Gamma_1} F(z)\,dz - \dots - \oint_{\Gamma_m} F(z)\,dz = 0$$

و Γ همه قطبها را دربرمی‌گیرد آنگاه داریم؛

$$\oint_{\Gamma} F(z)\,dz = \oint_{\Gamma_1} F(z)\,dz + \dots + \oint_{\Gamma_m} F(z)\,dz \longrightarrow 2\pi j\,(b_{11}+b_{12}+\dots+b_{1m}) \longrightarrow 2\pi j\,(k_1+k_2+\dots+k_m)$$

(که در آن k_1 تا k_m باقیمانده‌ها در z_1 تا z_m)

اینک اگر $X(z)$ تبدیل Z سیگنال $x(k)$ باشد

$$X(z)=\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,z^{-k} \longrightarrow x_0 + x(T)z^{-1}+\dots$$

و اگر طرفین رابطه را در z^{k-1} ضرب کنیم خواهیم داشت

$$X(z)\,z^{k-1} = x(0)\,z^{k-1} + x(T)\,z^{k} + \dots + x(kT)\,z^{-1} + \dots$$

اگر به عبارت فوق دقت کنیم درواقع بسط سری لوران ($X(z)z^{k-1}$) حول نقطه $z=0$ است؛ اگر C دایره به مرکز مبدأ و دربرگیرنده کلیه قطبهای ($X(z)z^{k-1}$) باشد آنگاه برای $x(kT)$ ضریب (z^{-1}) داریم؛

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j}\oint_{C} X(z)\,z^{k-1}\,dz$$

که بکمک قضیه باقیمانده قابل محاسبه است؛

اگر قطبها $X(z)z^{k-1}$ در z_1 تا z_m باشند و C_i دایره (حول فقط z_i) باشد،

$$\oint_c X(z)z^{k-1}\,dz \longrightarrow \oint_{c_1} X(z)z^{k-1}\,dz + \dots + \oint_{c_m} X(z)z^{k-1}\,dz \longrightarrow 2\pi j\,(k_1+\dots+k_m) \longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{m} (\text{باقیمانده } X(z)z^{k-1} \text{ در قطب } z=z_i)$$

در این ارزیابی مخرج $X(z)z^{k-1}$ قطب ساده‌ای در $(z=z_i)$ دارد لذا باقیمانده چنین محاسبه می‌شود:

$$* \; k_i = \lim_{z\to z_i} \left((z-z_i)X(z)z^{k-1}\right)$$

اگر $X(z)z^{k-1}$ قطب مرتبه q در z_i داشته باشد، محاسبات چنین خواهد بود:

$$* \; k_i = \frac{1}{(q-1)!} \lim_{z\to z_i} \frac{d^{q-1}}{dz^{q-1}} \left((z-z_i)^q X(z)z^{k-1}\right)$$

* برای نمونه چند مثال را بیان می‌کنیم:

1) $$X(z) = \frac{z(1-e^{-aT})}{(z-1)(z-e^{-aT})} \longrightarrow X(z)z^{k-1} = \frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})} \qquad k=0,1,2,\dots$$

قطبهای عبارت فوق به ازای تمام مقادیر k در $z_1=1$ و $z_2=e^{-aT}$ قرار دارند؛ لذا

$$\mathcal{Z}^{-1}(X(z)) = x(k) = \sum_{i=1}^{2} \left(\text{باقیمانده عبارت } \frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}\right) = k_1+k_2$$

$$k_1 = \lim_{z\to 1} (z-1)\frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})} = 1 \;;\; k_2 = \lim_{z\to e^{-aT}} \frac{(1-e^{-aT})z^k}{(z-1)(z-e^{-aT})}(z-e^{-aT}) = -e^{-aTk}$$

$$x(kT) = x(k) \longrightarrow k_1+k_2 = 1-e^{-aTk} \qquad k=0,1,2,\dots$$

2) $$X(z) = \frac{z^2}{(z-1)^2(z-e^{-aT})} \longrightarrow X(z)z^{k-1} = \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})} \qquad k=0,1,2,\dots$$

این عبارت یک قطب ساده در e^{-aT} و یک قطب مرتبه دوم در یک دارد؛

$$x(k) = \sum_{i=1}^{2} \left(\text{باقیمانده عبارت } \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2(z-e^{-aT})}\right) = k_1+k_2$$

$$k_1 = \lim_{z\to e^{-aT}} \frac{z^{k+1}}{(z-1)^2} \longrightarrow \frac{e^{-a(k+1)T}}{(1-e^{-aT})^2}$$

$$k_2 = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}\left(\frac{z^{k+1}}{z-e^{-aT}}\right) \rightarrow \lim_{z\to 1}\frac{(k+1)z^{k}(z-e^{-aT})-z}{(z-e^{-aT})^2} \rightarrow \frac{k}{1-e^{-aT}}-\frac{e^{-aT}}{(1-e^{-aT})^2}$$

$$x(kT)=x(k)\rightarrow k_1+k_2=-\frac{e^{-aT}\cdot e^{-akT}}{1-e^{-aT}}+\frac{k}{1-e^{-aT}}-\frac{e^{-aT}}{(1-e^{-aT})^2}\rightarrow$$

$$\frac{kT}{T(1-e^{-aT})}-\frac{e^{-aT}(1+e^{-kaT})}{(1-e^{-aT})^2}\qquad k=0,1,2,\dots$$

۳) $$X(z)=\frac{10}{(z-1)(z-2)}\rightarrow X(z)z^{k-1}=\frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$$

$$\text{for } k=0\rightarrow X(z)z^{k-1}=\frac{10}{(z-1)(z-2)z}\ ،\ \text{for } k\geq 1\quad X(z)z^{k-1}=\frac{10z^{k-1}}{(z-1)(z-2)}$$

$$k=0\rightarrow x(0)=\lim_{z\to 0}\frac{10}{(z-1)(z-2)}+\lim_{z\to 1}\frac{10}{(z-2)z}+\lim_{z\to 2}\frac{10}{(z-1)z}=0$$

$$k\geq 1\rightarrow x(k)=\lim_{z\to 1}\frac{10z}{z-2}+\lim_{z\to 2}\frac{10z^{k-1}}{z-1}=-10+5(2^k)$$

$x(k)=5\,\delta_0(k)+10(2^{k-1}-1)\leftarrow$ یا می‌توان چنین نوشت

* تابع انتقال پالسی و رشته وزنی :

اگر رابطهٔ ورودی و خروجی یک سیستم گسسته از زمان به صورت معادله تفاضلی زیر داده شده باشد که در آن (u) سیگنال ورودی و (x) سیگنال خروجی سیستم است:

$$x(k)+a_1x(k-1)+\dots+a_n x(k-n)=b_0u(k)+b_1u(k-1)+\dots+b_nu(k-n)$$

با گرفتن تبدیل Z از طرفین:

$$Z(x(k))=X(z)\rightarrow X(z)+a_1z^{-1}X(z)+\dots+a_nz^{-n}X(z)=b_0U(z)+b_1z^{-1}U(z)+\dots\rightarrow$$

$$(1+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n})X(z)=(b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n})U(z)\rightarrow X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n}}{1-a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}U(z)$$

حال اگر $u(k)=\delta_0(k)\rightarrow X(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}=G(z)$

که $G(z)$ را تابع انتقال پالسی می‌نامیم و متقابلاً $g(k)=Z^{-1}(G(z))$ را رشته وزنی (weighting sequence) می‌نامیم.

$$x(k+2)+a_1x(k+1)+a_2x(k)\simeq b_0u(k+2)+b_1u(k+1)+b_2u(k)$$

برای نمونه داریم؛

$$z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)+a_1(zX(z))-zx(0)+a_2X(z)\simeq b_0(z^2u(z)-z^2u(0)-zu(1))+b_1(zu(z)$$

اگر سیستم قبل از (k=0) در حالت استراحت در نظر گرفته شود؛ $x(k)\simeq 0 \quad \text{for} \quad k<0$

در این صورت خواهیم داشت؛

$$x(0)+a_1x(-1)+a_2x(-2)\simeq b_0u(0)+b_1u(-1)+b_2u(-2)\longrightarrow x(0)\simeq b_0u(0)$$

$$x(1)+a_1x(0)+a_2x(-1)\simeq b_0u(1)+b_1u(0)+b_2u(-1)\longrightarrow x(1)\simeq -a_1x(0)+b_0u(1)+b_1u(0)$$

اگر این مقادیر را در معادله قرار دهیم خواهیم داشت؛

$$X(z)\simeq\frac{b_0z^2+b_1z+b_2}{z^2+a_1z+a_2}u(z)$$

در این صورت تابع انتقال پالس برابر است با؛

$$G(z)\simeq\frac{b_0z^2+b_1z+b_2}{z^2+a_1z+a_2}\longrightarrow\frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$$

مثال: با استفاده از تبدیل Z معادله تفاضلی ذیل را حل کنید؛

$$x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=0 \quad x(k)=0 \quad \text{for} \quad k<0 \quad x(0)\simeq 0 \; ; \; x(1)\simeq 1$$

$$\mathcal{Z}(\text{معادله})\longrightarrow z^2X(z)-z^2x(0)-zx(1)+3zX(z)-3x(0)+2X(z)\simeq 0\longrightarrow$$

$$X(z)\simeq\frac{z}{z^2+3z+2}\longrightarrow\frac{z}{(z+1)(z+2)}\longrightarrow\frac{z}{z+1}-\frac{z}{z+2}\longrightarrow\frac{1}{1-z^{-1}}-\frac{1}{1-2z^{-1}}\longrightarrow$$

$$x(k)\simeq(-1)^k-(-2)^k \quad k=0,1,2,\dots$$

مثال: پاسخ سیستم با معادلات تفاضلی را بدست آورید؛

$$x(k+2)-3x(k+1)+2x(k)\simeq\delta_0(k) \; ; \; x(k)\simeq 0 \quad \text{for} \quad k<0 \quad (x(0)=0 \; ; \; x(1)=0)$$

$$(z^2-3z+2)X(z)=\delta(z)\simeq 1\longrightarrow X(z)\simeq\frac{1}{z^2-3z+2}\longrightarrow X(z)\simeq\frac{-1}{z-1}+\frac{1}{z-2}\longrightarrow\frac{-z^{-1}}{1-z^{-1}}+\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

$$\mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}\right)\begin{cases}1 & k=1,2,\dots\\ 0 & k\leq 0\end{cases} \; ; \; \mathcal{Z}^{-1}\left(\frac{z^{-1}}{1-2z^{-1}}\right)\begin{cases}2^{k-1} & k=1,2,3,\dots\\ 0 & k\leq 0\end{cases}$$

$x(k) = -1 + 2^{k-1} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$

وبرای اینکار می‌توانستیم از رابطهٔ $Z\,x(z)$ استفاده کنیم:

$$zX(z) = \frac{-z}{z-1} + \frac{z}{z-2} \rightarrow -\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

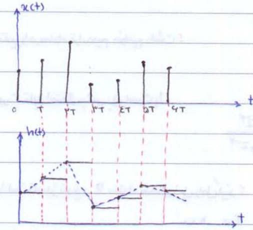
$$Z^{-1}\left(\frac{1}{1-z^{-1}}\right) = 1$$

$$Z^{-1}\left(\frac{1}{1-2z^{-1}}\right) = 2^k \qquad k \geq 0$$

$$Z(x(k+1)) = zX(z) - Z(x(0)) \rightarrow zX(z) \;:\; x(k+1) = -1 + 2^k \qquad k \geq 0$$

$$x(k+1) = -1 + 2^{k-1} \qquad k \geq 1$$

Impulse sampling و بازسازی سیگنال نمونه‌برداری شده:



مسئله: می‌خواهیم بکمک نمونه‌های داده‌شده از $x(t)$ سیگنال $h(t)$ را بگونه‌ای بسازیم که حتی‌الامکان به $x(t)$ نزدیک باشد.

درحالت کلی $h(t)$ می‌تواند بصورت رابطه‌ای به این صورت نوشته شود (وحتی عبارت دیگر که متفاوت با این عبارت است)

$$h(kT+\tau) = a_n \tau^n + a_{n-1}\tau^{n-1} + \ldots + a_1 \tau + a_0 \;;\quad 0 \leq \tau \leq T$$

به این عبارت نگهدار مرتبه n گوئیم (nth order hold)

درواقع سیستم نگهدار هر مرتبه از مقادیر $n+1$ دورهٔ گذشته استفاده می‌کند، تا مقدار سیگنال در بازهٔ بعدی را بازسازی نماید (n) بزرگتر، جزئیات بیشتر را بدست می‌آورد؛ لذا سیگنال بازسازی شده به سیگنال آنالوگ اولیه شبیه‌تر می‌شود.

درساده‌ترین حالت اگر $n=0$ باشد (Zero order hold)

$$h(kT+\tau) = x(kT) \;;\quad 0 \leq \tau \leq T$$

* نمایش سیگنال $h(t)$:

$$h(t) = x(0)\left(1(t) - 1(t-T)\right) + x(T)\left(1(t-T) - 1(t-2T)\right) + \ldots$$

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\left(1(t-kT) - 1(t-(k+1)T)\right)$$

بدست آوردن مدل پیوسته در فضای لاپلاس:

$$\mathcal{L}\left(1(t-kT)\right) = \frac{e^{-kTs}}{s} \quad : \quad \mathcal{L}\left(h(t)\right) = H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\frac{e^{-kTs} - e^{-(k+1)Ts}}{s} \rightarrow$$

$$H(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)e^{-kTs}$$

و نیز می‌توان نوشت:

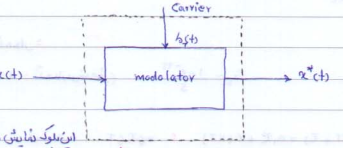
$$H(s) = G_{h_0}(s)\, X^*(s) \quad \begin{cases} G_{h_0}(s) = \dfrac{1-e^{-Ts}}{s} \\[2ex] X^*(s) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kTs} \end{cases}$$

از آنجا که $X^*(s)$ معادل تبدیل لاپلاس سیگنال $X(KT)$ (نا پیوسته) است، لذا می‌توان تابع تبدیل سیگنال نگهدار مرتبه صفر را چنین در نظر گرفت.

$$G_{h_0}(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \qquad x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

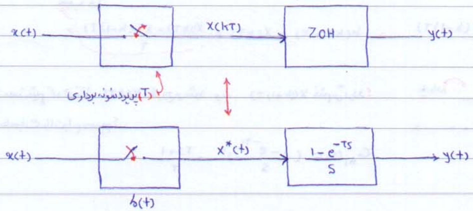
حال اگر تعریف کنیم که:

$$\delta_T(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t-kT) \longrightarrow x^*(t) = \dots + x_0\,\delta(t) + x(T)\,\delta(t-T) + \dots \longrightarrow \sum_{k=-\infty} x(kT)\,\delta(t-\dots$$



این بلوک نمایش دهنده طریقه تولید $X^*(t)$ براساس $x(t)$ می‌باشد.

* تبدیل Z سیگنال نمونه برداری شده با ضربه:



$X^*(s) = \mathcal{L}(x^*(t)) \longrightarrow x(0)\,\mathcal{L}(\delta(t)) + x(T)\,\mathcal{L}(\delta(t-T)) + \dots \longrightarrow$

$x(0) + x(T)e^{-Ts} + x(2T)e^{-2Ts} + \dots \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, e^{-kST}$

اگر تعریف کنیم:

$e^{-Ts} = z^{-1} \longrightarrow s = \frac{1}{T}\ln z \;;\; X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\, z^{-k} \longrightarrow X^*(s)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z} = X(z)$

* حال برای نمونه داریم:

If $x(t) = \delta(kT) \longrightarrow x^*(t) = x(t)\,\delta_T(t) \longrightarrow x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$

$x(kT) = 0$ for $k \neq 0 \longrightarrow x^*(t) = x(0)\,\delta(0) \longrightarrow X^*(s) = X(0) \longrightarrow \delta_0(0) = 1$

که رابطه قبلی را برای $x(t) = \delta_0$ تأیید می‌کند $X(z) = \mathcal{Z}(\delta_0(kT)) = 1$

مثال: تبدیل Z سیگنال نمونه برداری شده را محاسبه کنید:

$x(t) = 1(t) \longrightarrow x^*(t) = x(t)\,\delta_T(t) \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \delta(t-kT) \longrightarrow X^*(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kTs} = \frac{1}{1-e^{-Ts}}$

$X(z) = \mathcal{Z}(1(t)) = \frac{1}{1-z^{-1}}$ که رابطهٔ قبلی را برای $x(t) = 1(t)$ تأیید می‌کند.

* تابع انتقال سیستمهای نگهدار:

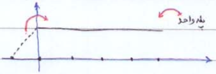
نشان دادیم که به ازای $n=0$ (نگهدار مرتبه صفر) $G_{h0} = \frac{1-e^{-Ts}}{s}$

If $n=1 \longrightarrow h(kT+\tau) = a_1\tau + x(kT) \;;\; 0 \leq \tau \leq T \quad k=0,1$

شرایط مرزی: $h((k-1)T) = x((k-1)T) \longleftrightarrow -a_1T + x(kT) \longrightarrow$

شیب خط

$a_1 = \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \longrightarrow h(kT+\tau) = x(kT) + \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T}\,\tau$



* خط مستقیم که از نقطه $x(kT)$ شروع می‌شود و به $x((k+1)T)$ ختم می‌گردد:

اگر محاسبات را انجام دهیم:

$G_{h1}(s) = \left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\right)^2 \frac{Ts+1}{T}$

* بدست آوردن تبدیل Z بکمک انتگرال کانولوشن :

اگر در نظر بگیریم :

$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\,\delta(t-kT) \longrightarrow x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT) \quad ; \quad \mathcal{L}(\delta(t-kT)) = e^{-kTs}$$

$$\mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right) = 1 + e^{-Ts} + \dots \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-Ts}}$$

یادآوری : $\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \int_0^{\infty} f(t)g(t)e^{-st}\,dt$; $f(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(s)e^{ts}\,ds$ ، $t>0$

(که در آن C مختصات همگرایی برای F(s))

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi j}\int_0^{\infty}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(p)e^{pt}\,dp\; g(t)e^{-st}\,dt \longrightarrow$$

چون F(s) همگراست در این صورت انتگرال را مرتب کرد :

$$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(p)\,dp\int_0^{\infty} g(t)e^{-(s-p)t}\,dt \longrightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} F(p)\,G(s-p)\,dp$$

حال اگر به جای (f و g) مقادیر x(t) و $\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)$ را قرار دهیم :

$$G(s) = \mathcal{L}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right) = \frac{1}{1-e^{-Ts}} \quad ; \quad G(s-p) = \frac{1}{1-e^{-(s-p)T}}$$

که محل قطبها $p = s \pm j\frac{2\pi k}{T}$

$$(*)\quad X^*(s) = \mathcal{L}\left(x(t)\sum_{k=0}^{\infty}\delta(t-kT)\right) \longrightarrow \frac{1}{2\pi j}\int_{C-j\infty}^{C+j\infty} X(p)\,\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp$$

$$P = s + j\frac{2\pi k}{T} \longrightarrow s + j\omega_s k \qquad k = 0, 1, 2, \dots$$

فرکانس نمونه برداری

که در آن کانتور (C) در محلی باشد که خط مربوط به آن قطبهای X(p) را از قطبهای $\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$ جدا سازد ، به تساوی فوق (*) انتگرال کانولوشن گویند.

در واقع انتگرال فوق می توان از روش باقیمانده ها با ایجاد مسیر بسته ای که شامل خط (C-j∞ تا C+j∞) و دایره ای به شعاع بینهایت بدست می آید ، بطور مشابه انتگرال فوق می تواند بروی مسیر بسته شامل خط مزبور و نیم دایره بینهایت در نیم صفحه راست نیز ارزیابی گردد .

* اگر فرض کنیم $X(s)=\frac{P(s)}{q(s)}$ و درجه q از P بیشتر باشد، پس $\lim_{s\to\infty} X(s)=0$ لذا با در نظر گرفتن مسیر در نیم صفحه چپ

$$X^*(s)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} X(p)\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}dp \rightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp - \frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_L} \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp$$

که در آن Γ_L نیم دایره با شعاع بینهایت در نیم صفحه سمت چپ است. در این حال قطبهای $\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$ خارج از مسیر ذکر شده قرار خواهند گرفت، با توجه به فرض بیشتر بودن درجه مخرج $X(s)$ از درجه صورت آن انتگرال روی Γ_L صفر خواهد شد، چون برای $|s|\to\infty$ مقدار روی مسیر صفر است.

$$X^*(s)=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp \rightarrow \sum \left(\text{باقیمانده عبارت } \frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}} \text{ در قطبهای } X(p)\right) \rightarrow$$

$$\sum\left(\text{باقیمانده } \frac{X(p)z}{z-e^{Tp}} \text{ در قطبهای } X(p)\right) \rightarrow \sum\left(\text{باقیمانده } \frac{X(s)z}{z-e^{Ts}} \text{ در قطبهای } X(s)\right) \rightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(n_i-1)!}\lim_{s\to s_i}\frac{d^{n_i-1}}{ds^{n_i-1}}\left(\frac{(s-s_i)^{n_i}X(s)z}{z-e^{Ts}}\right)+\sum_{j=k+1}^{n_i}\lim_{s\to s_j}\left((s-s_j)\frac{X(s)z}{z-e^{Ts}}\right)$$

* که در آن فرض شده $X(s)$ دارای n قطب مکرر و $(m-n)$ قطب ساده باشد.

برای نمونه داریم: $X(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}$

$$X(z)=\frac{1}{(2-1)!}\lim_{s\to 0}\frac{d}{ds}\left(\frac{s^2}{s^2(s+1)}\frac{z}{z-e^{Ts}}\right)+\lim_{s\to -1}\frac{s+1}{s^2(s+1)}\frac{z}{z-e^{Ts}}\rightarrow$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{-z(z-e^{Ts}+(s+1)(-T)e^{Ts})}{(s+1)^2(z-e^{Ts})^2}+\frac{1}{(-1)^2}\frac{z}{z-e^{Ts}}\rightarrow\frac{-z-(z-1-T)}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-e^{-T}}\rightarrow$$

$$\frac{z^{-2}(T-1+e^{-T})+z^{-1}(1-e^{-T}-Te^{-T})}{(1-z^{-1})^2(1-e^{-T}z^{-1})}$$

* گفتنیم که ضمناً می‌توان انتگرال کانولوشن را روی نیم صفحه راست نیز انجام داد، در این صورت مسیر باید فقط کلیه قطبهای $\frac{1}{1-e^{-T(s-p)}}$ را در برگیرد.

$$X^*(s)=\frac{1}{2\pi j}\int_{c-j\infty}^{c+j\infty}\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp\rightarrow\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp-\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R}\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}dp$$

اگر قرار قبلی، فزونی درجه مخرج بر صورت $X(p)$ برقرار باشد و ضمناً تفاوت درجه صورت و مخرج ۲ و یا بیشتر باشد، چون سرعت به صفر رسیدن $X(s)$ سریع‌تر از سرعت افزایش S بخش مسیر روی Γ_R است لذا انتگرال روی Γ_R صفر خواهد شد.

اما اگر تفاوت درجه صورت و مخرج تنها یک باشد، می‌توان نشان داد که سهم انتگرال روی Γ_R مقدار مشخص ذیل است:

$$\frac{1}{2\pi j}\int_{\Gamma_R}\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp = \frac{1}{2}x(0^+)$$

جهت انتگرال عقربه ساعت

$$\text{but}\quad \frac{1}{2\pi j}\oint\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}\,dp \longrightarrow -\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\lim_{p\to s+j\omega_s k}\left((p-(s+j\omega_s k))\frac{X(p)}{1-e^{-T(s-p)}}\right)\longrightarrow$$

$$-\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left.\frac{X(p)}{\frac{d}{dp}\left(1-e^{-T(s-p)}\right)}\right|_{p=s+j\omega_s k}\longrightarrow\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{X(s+j\omega_s k)}{-T} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(s+j\omega_s k)$$

$$X^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(s+j\omega_s k)\begin{cases}0 & n_p-n_s\geq 2\\ \frac{x(0^+)}{2} & n_p-n_s=1\end{cases}$$

$$X^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}X(s+j\omega_s k)\Big|_{s=\frac{1}{T}\ln z}+\begin{cases}0 & n_p-n_s\geq 2\\ \frac{x(0^+)}{2} & n_p-n_s=1\end{cases}$$

مثال: تابع $X(z)$ برای $x(t)=\begin{cases}e^{-at} & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ را به کمک انتگرال کانولوشن محاسبه کنید:

$$X(s)=\frac{1}{s+a}\longrightarrow\lim_{s\to\infty}sX(s)=x(0^+)=1$$

$$X^*(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X(s+j\omega_s k)+\frac{(x(0^+))}{2}\longrightarrow\frac{1}{T}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(X(s+j\omega_s k)+X(s-j\omega_s k)\right)+X(s)\right]+\frac{1}{2}\longrightarrow$$

$$\frac{1}{T}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{s+j\omega_s k+a}+\frac{1}{s-j\omega_s k+a}\right)+\frac{1}{s+a}\right)+\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{1}{T}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2(s+a)}{(s+a)^2+(\omega_s k)^2}+\frac{1}{s+a}\right)+\frac{1}{2}\longrightarrow$$

$$\frac{1}{2\pi}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\frac{2(s+a)}{\omega_s}}{\left(\frac{s+a}{\omega_s}\right)^2+k^2}+\frac{\omega_s}{s+a}\right)+\frac{1}{2}\longrightarrow\frac{\pi}{2\pi}\,\frac{1+e^{-T(s+a)}}{1-e^{-T(s+a)}}+\frac{1}{2}=\frac{1}{1-e^{-aT}e^{-Ts}}$$

Subject .　　　　　　　　　　　　Year.　　Month.　　Day.

(باتوجه به اینکه میدانیم) $\longrightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2x}{x^2+k^2} + \frac{1}{x} = \pi \frac{1+e^{-2\pi x}}{1-e^{-2\pi x}}$ ؛ $2\pi \frac{s+a}{\omega_s} = T(s+a)$

Final $\longrightarrow X(z) = \dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$

* بدست آوردن تبدیل Z توابعی که شامل عبارت $\frac{1-e^{-Ts}}{s}$ هستند؛

ZOH

$X(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \cdot G(s) \longrightarrow 1-e^{-Ts} \frac{G(s)}{s} \longrightarrow G_1(s) = \frac{G(s)}{s}$ ؛ $X(s) = (1-e^{-Ts}) G_1(s)$

If : $X_1(s) = e^{-Ts} G_1(s) \longrightarrow$ فرض شود $g_0(t) = \mathcal{L}^{-1}(e^{Ts}) = \delta(t-T)$

$g_1(t) = \mathcal{L}^{-1}(G_1(s))$

$x_1(t) = \int_0^t \delta(t-T-\tau) g_1(\tau) d\tau \longrightarrow g_1(t-T)$

If : $\mathcal{Z}[g_1(t)] = G_1(z)$ ؛ $\mathcal{Z}(x_1(t)) = \mathcal{Z}(g_1(t-T)) = z^{-1} G_1(z) \longrightarrow$

$X(z) = \mathcal{Z}(G_1(s) - e^{-Ts} G(s)) \longrightarrow \mathcal{Z}(g_1(t)) - \mathcal{Z}(x_1(t)) \longrightarrow G_1(z) - z^{-1} G_1(z) = (1-z^{-1}) G_1(z)$

* $X(z) = \mathcal{Z}(X(s)) = (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left(\frac{G(s)}{s}\right)$

روابط قبلی برای ZOH چنین خواهد بود؛

$X(s) = (1-e^{-Ts})^2 \frac{Ts+1}{Ts^2} G(s) \longrightarrow X(z) = (1-z^{-1})^2 \mathcal{Z}\left(\frac{Ts+1}{Ts^2} G(s)\right)$

برای نمونه برای تابع $X(s)$ داریم؛

$X(s) = \frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s+1} \longrightarrow X(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s} \frac{1}{s+1}\right) \longrightarrow (1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s(s+1)}\right) \longrightarrow$

$(1-z^{-1}) \mathcal{Z}\left(\frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right) \longrightarrow (1-z^{-1})\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) \longrightarrow \frac{(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}}$

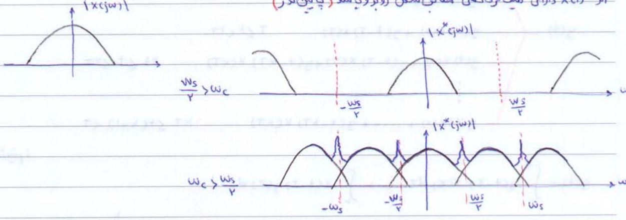
* بازسازی سیگنال گسسته در زمان پیوسته:

قضیه نمونه برداری:

اگر $x(t)$ سیگنال اولیه و $x^*(t)$ سیگنال نمونه‌برداری شده آن باشد

$$x^*(t)\simeq\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{+\infty} x(j\omega+j\omega_s k)\longrightarrow \dots+\frac{1}{T}x(j(\omega-\omega_s))+\frac{1}{T}x(j(\omega+\omega_s))+\frac{1}{T}(j(\omega+2\omega_s))+\dots$$

اگر $x(t)$ دارای طیف فرکانسی مطابق شکل روبرو باشد (پایین‌گذر)



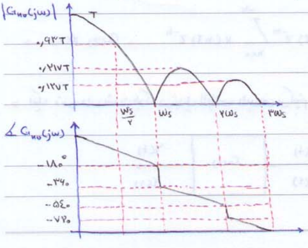
$\frac{1}{2}\omega_s$ را فرکانس نایکوئیست یا (folding) گویند.

(aliasing) اگر فرکانس سیگنال از فرکانس نمونه برداری بیشتر باشد در این صورت این حالت روی هم افتادگی پیش می‌آید.

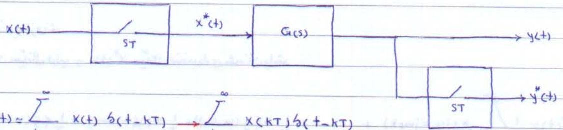
* ویژگیهای مدار نگهدارنده:

از جمله فیلترهای پایین‌گذر که بصورت رایج استفاده می‌شود، مدار نگهدارنده مرتبه صفر است

$$G_{h_0}(s)\simeq\frac{1-e^{-Ts}}{s}\longrightarrow G_h(j\omega)\simeq\frac{1-e^{-Tj\omega}}{j\omega}\longrightarrow\frac{2e^{-\frac{jT\omega}{2}}\left(e^{\frac{jT\omega}{2}}-e^{-\frac{jT\omega}{2}}\right)}{2j\omega}=T\frac{\sin(\frac{\omega T}{2})}{\frac{\omega T}{2}}e^{-j\frac{T\omega}{2}}$$



* تابع تبدیل پالسی :



$$x^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} x(t)\,\delta(t-kT) \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,\delta(t-kT)$$

$$y(t) = \begin{cases} g(t)\,x(0) & 0<t<T \\ g(t)\,x(0) + g(t-T)\,x(T) & T<t<2T \\ g(t)\,x(0) + g(t-T)\,x(T) + g(t-2T)\,x(2T) & 2T<t<3T \\ \vdots & \\ g(t)\,x(0) + \dots + g(t-kT)\,x(kT) & kT<t<(k+1)T \end{cases}$$

زیرا داشتیم :

$$g(t) = \int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau \leftrightarrow \int_0^t x(t-\tau)\,g(\tau)\,d\tau$$

$$y(t) = g(t)\,x(0) + g(t-T)\,x(T) + \dots + g(t-kT)\,x(kT) \rightarrow \sum_{h=0}^{k} g(t-hT)\,x(hT) \quad 0<t<k$$

مقادیر $y(t)$ در زمانهای نمونه‌برداری چنین هستند :

$$y(kT) = \sum_{h=0}^{k} g(kT-hT)\cdot x(hT) \rightarrow \sum x(kT-hT)\,g(hT) \rightarrow x(kT) * g(kT)$$

که در آن $g(kT)$ را رشته وزنی سیستم و عبارت فوق را جمع کانولوشن می‌نامیم :

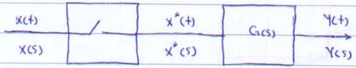
اگر بخواهیم تبدیل Z را برای y بدست آوریم :

$$y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(kT)\,z^{-k} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(kT-hT)\,x(hT)\,z^{-k} \rightarrow m = k-h \rightarrow$$

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} g(mT)\,x(hT)\,z^{-(m+h)} \rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} g(mT)\,z^{-m} \sum_{h=0}^{-k} x(hT)\,z^{-h} \rightarrow G(z)\cdot X(z) \rightarrow$$

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

* حال نحوه وارد شدن بلوک در تبدیل لاپلاس را بررسی می‌کنیم :



یادآوری: $X^*(s) = X^*(s + j\omega_s k)$

$Y(s) = G(s) \cdot X^*(s)$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)X^*(s)) = \int_0^t g(t-\tau)\,x^*(\tau)\,d\tau \longrightarrow y(t) = \int_0^t g(t-\tau)\sum_{k=0}^{\infty} x(\tau)\,\delta(\tau - kT)\,d\tau$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\int_0^t g(t-\tau)\,x(\tau)\,\delta(\tau-kT)\,d\tau \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} g(t-kT)\,x(kT)$$

$$Y(z) = \mathcal{Z}(y(t)) = \sum_{h=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{\infty} g(kT-hT)\,x(kT)\right]z^{-h} \longrightarrow \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} g(mT)\,x(kT)\,z^{-(k+m)}$$ ؛ $m = h$

$$\sum_{m=0}^{\infty} g(mT)\,z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty} x(kT)\,z^{-k} \longrightarrow G(z)\,X(z)$$

ب) اما با توجه به اینکه دیدیم تبدیل Z می‌تواند از تبدیل لاپلاس ستاره‌دار
که در آن بجای Z متوار e^{Ts} گذاشته شود، بدست آید می‌توان نتیجه گرفت.

$$Y^*(s) = G^*(s) \cdot X^*(s)$$

به عبارتی اگر دیاگرام توابع نمونه برداری شده متوالی داشته باشیم، تبدیل و ستاره‌دار لاپلاس آنها در هم ضرب شوند.

$$\text{If } Y^*(s) = (G\,X(s))^* \longrightarrow Y(z) = \mathcal{Z}(y(s)) \longleftrightarrow \mathcal{Z}(G(s)X(s)) \longrightarrow \mathcal{Z}(G\,X(s)) \longrightarrow$$

$G\,X(z) \neq G(z)\,X(z)$ به عبارتی دیگر اگر در فضای لاپلاس $G(s)\,X(s)$ در فضای لاپلاس $G(z)\,X(z)$ بدست نمی‌آید

مثال: تبدیل Z تابع‌های $G(s)$ را محاسبه کنید؟ (از سه روش)

۱) $G(s) = \dfrac{1}{s+a}$

① $\mathcal{Z}\left(\dfrac{1}{s+a}\right) = \dfrac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$ ② $g(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)) = e^{-aT} \longrightarrow g(kT) = e^{-akT}$ $k = 0, 1, 2, \dots$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-akT}z^{-k} \longrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(e^{aT}z^{-k}) \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

③ $$G(z) = \lim_{s \to -a}\left((s+a)\frac{1}{s+a}\cdot\frac{z}{z-e^{sT}}\right) \longrightarrow \frac{z}{z-e^{-aT}} \longrightarrow \frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}$$

۲) $G(s) = \dfrac{1-e^{-Ts}}{s}\left(\dfrac{1}{s(s+1)}\right)$

$$① \quad G(z) = \mathcal{Z}\left((1-e^{-Ts}) \frac{1}{s^2(s+1)} \right) \longrightarrow (1-z^{-1})\mathcal{Z}\left(\frac{1}{s^2(s+1)}\right) \longrightarrow$$

$$(1-z^{-1})\left(\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2} - \frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}}\right) \longrightarrow \frac{(T-1+e^{-T})z^{-1} + (1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-2}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}$$

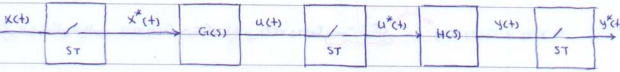
$$② \quad G(s) = (1-e^{Ts})\left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right) \longrightarrow g(t) = (t - Te^{-t})\, 1(t) - (t - T + 1 + e^{-(t+T)})\, 1(t+T) + \dots$$

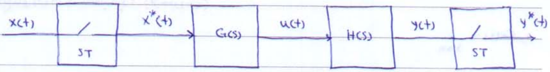
$$g(kT) = (kT - Te^{-kT}) - (kT - T - 1 + e^{-(kT-T)})\, 1((k-1)T) \to \begin{cases} 0 & k=0 \\ e^{-kT} + T - e^{-(kT-T)} & k=1,2,\dots \end{cases}$$

$$G(z) = \sum_{k=0}^{\infty} (e^{-kT} + T - e^{-(kT-T)}) z^{-k} + e^{-T} - 1 - T \longrightarrow (1-e^{T}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kT} z^{-1} + T \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} + e^{T} - 1 - T \longrightarrow$$

$$(1-e^{T}) \frac{1}{1-e^{-T}z^{-1}} + \frac{T}{1-z^{-1}} + e^{T} - 1 - T \longrightarrow \frac{(T-1+e^{-T})z^{-1} + (1-e^{-T}-Te^{-T})z^{-k}}{(1-z^{-1})(1-e^{-T}z^{-1})}$$

* تابع تبدیل پالسی عناصر متوالی:





* روابط در شکل اول:

$$U(s) = G(s)\, X^*(s) \quad ; \quad Y(s) = H(s)\, U^*(s)$$

$$U^*(s) = G^*(s)\, X^*(s) \quad ; \quad Y^*(s) = H^*(s)\, U^*(s) \longrightarrow Y^*(s) = H^*(s)\, G^*(s)\, X^*(s) \longrightarrow$$

$$Y(z) = G(z)\, H(z)\, X(z) \longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = G(z)\, H(z)$$

* روابط در شکل دوم:

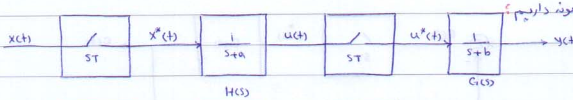
$$Y(s) = G(s)\,H(s)\,X^*(s) \longrightarrow GH(s)\,X^*(s)$$

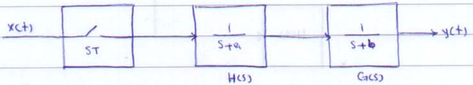
یادآوری: $G(s)\,H(s) = GH(s)$

$$Y^*(s) = (GH(s))^*\,X^*(s) \longrightarrow GH^*(s)\,X^*(s) \longrightarrow$$

$$Y(z) = GH(z)\,X(z) \longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)} = GH(z) \longrightarrow \mathcal{Z}(GH(s)) \longrightarrow G(z)\,H(z) \neq GH(z)$$

برای نمونه داریم:





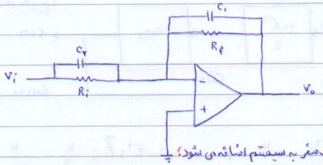
در شکل اول $\longrightarrow \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \dfrac{Y(z)}{U(z)} \cdot \dfrac{U(z)}{X(z)} \longrightarrow H(z)\,G(z) = \mathcal{Z}\left(\dfrac{1}{s+a}\right)\mathcal{Z}\left(\dfrac{1}{s+b}\right) \longrightarrow$

$$\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}}\;\frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}$$

در شکل دوم $\longrightarrow \dfrac{Y(z)}{X(z)} = \mathcal{Z}(G(s)\,H(s)) \longrightarrow \mathcal{Z}\left(\dfrac{1}{s+a}\,\dfrac{1}{s+b}\right) \longrightarrow \mathcal{Z}\left(\dfrac{1}{b-a}\left(\dfrac{1}{s+a} - \dfrac{1}{s+b}\right)\right)$

$$\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{1-e^{-aT}z^{-1}} - \frac{1}{1-e^{-bT}z^{-1}}\right) \longrightarrow \frac{1}{b-a}\left(\frac{(e^{-aT}-e^{-bT})\,z^{-1}}{(1-e^{-aT}z^{-1})(1-e^{-bT}z^{-1})}\right)$$

* کنترلر دیجیتال از آنالوگ بهتر است از هر لحاظ ، برای مثال اگر بخواهیم صفر در سیستم اضافه کنیم ، برنامه را عوض می‌کنیم ولی در آنالوگ برای اضافه کردن یک صفر مانند ذیل عمل می‌کنیم:

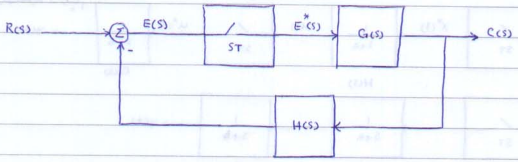


با اضافه کردن خازن (C_1) یک قطب و (C_2) یک صفر به سیستم اضافه می‌شود؛

low Pass (پایین گذر)
High Pass (بالاگذر)
Band Pass (میان گذر)
Band riject : یک باند میانی را عبور می‌دهد واطراف آن دورا عبور نشی دهد.

انواع فیلتر

* تابع تبدیل پالس سیستم حلقه بسته :



$E(s) = R(s) - H(s)C(s)$; $C(s) = G(s)E^*(s) \longrightarrow E(s) = R(s) - G(s)H(s) \cdot E^*(s) \longrightarrow$

برای اینکه بتوان تبدیل Z گرفته شود (استار) میگیریم : $E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s) \longrightarrow$ تبدیل پالسی

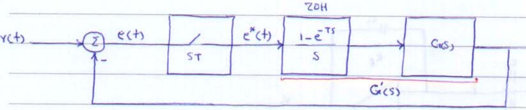
$$E^*(s) = R^*(s) - GH^*(s)E^*(s) \longrightarrow E^*(s) = \frac{R^*(s)}{1+GH^*(s)} \; ; \; G^*(s)H^*(s) = \frac{G^*(s)R^*(s)}{1+GH^*(s)}$$

$$C(z) = \frac{G(z)R(z)}{1+GH(z)}$$

درحالت کلی بین دوتابعی که نمونه بردار باشد تبدیل Z میگیریم از تک تک بلوکها ؛ و اگر در بین بلوک (بحره) نباشد ، آنها را درهم ضرب و از کل آن یک تبدیل Z میگیریم .

(G^* یعنی G که نمونه برداری شده است)

برای نمونه دیگر داریم :

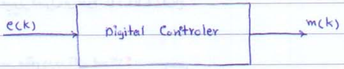


$G(s) = \frac{k}{s+1}$

$$G'(z) = Z(G'(s)) \longrightarrow Z\left((1-e^{-sT})\frac{k}{s(s+1)}\right) \longrightarrow (1-z^{-1})Z\left(\frac{k}{s} - \frac{k}{s+1}\right) \longrightarrow$$

$$\frac{k(1-e^{-T})z^{-1}}{1-e^{-T}z^{-1}} \longrightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{k(1-e^{-T})z^{-1}}{1+(k-(k+1)e^{-T})z^{-1}}$$

* تابع تبدیل پالسی کنترل کننده (دیجیتال):



درحالت کلی:

$$m(k)+a_1m(k-1)+a_2m(k-2)+\dots+a_nm(k-n) = b_0e(k)+\dots+b_ne(k-n) \rightarrow$$

$$M(z)+a_1z^{-1}M(z)+\dots+a_1z^{-n}M(z) = b_0E(z)+b_1z^{-1}F(z)+\dots+b_nz^{-n}E(z)$$

اغتشاش — اگر دائم باشد (نویز)
اگر لحظه‌ای باشد (اغتشاش)

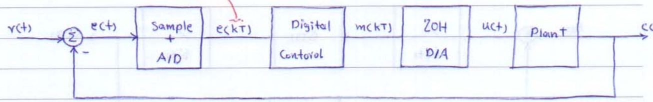
* بهترین سیستم در کنترل رسیدن به تابع انتقال $G(s)=1$ که امکان پذیر نیست.

$$G_D(z)=\frac{M(z)}{E(z)} \longrightarrow \frac{b_0+b_1z^{-1}+\dots+b_nz^{-n}}{1-a_1z^{-1}+\dots+a_nz^{-n}}$$

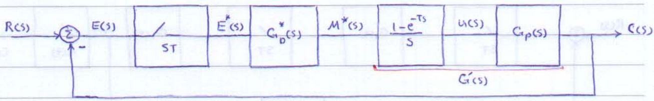
(هر فرایند دیجیتال نهایتاً به این تابع می‌رسد)

نحوه قرارگرفتن کنترل کننده دیجیتال در سیستم‌ها می‌تواند چنین باشد:

(در هر پریود مشخص یک مقدار تازه می‌آید)



ZOH پالس‌های گسسته را تبدیل به پله می‌کند:



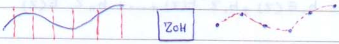
$$G'(s)=\frac{1-e^{-Ts}}{s}G_p(s) \quad ، \quad C(s)=\frac{G'(s)}{G_D^*(s)E^*(s)} \longrightarrow C^*(s)=G'^*(s)\,G_D^*(s)\,E^*(s) \longrightarrow$$

$C(z) \simeq G(z)\,G_D(z)\,E(z)$ ، $E(z) \simeq R(z) - C(z) \rightarrow$

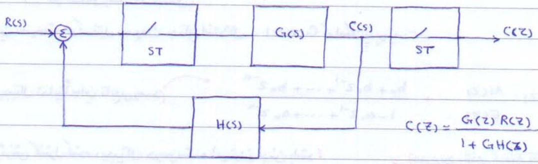
$$\frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G_D(z)\,G'(z)}{1 + G_D(z)\,G'(z)}$$

* هر دستگاه وابزاری که با کامپیوتر کنترل می‌شود را (LVC) گویند؛

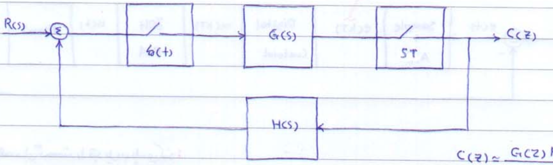
c(t) در حال حاضر در داخل سیستم دیجیتال است؛



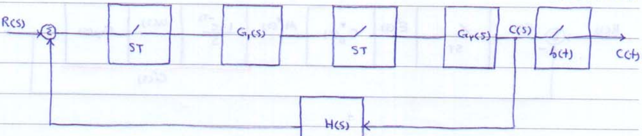
* نحوه چگونه ضرب توابع انتقال در اثر نمونه برداری؛



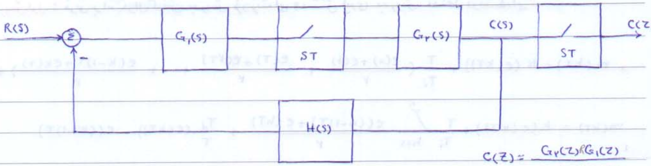
$$C(z) = \frac{G(z)\,R(z)}{1 + GH(z)}$$



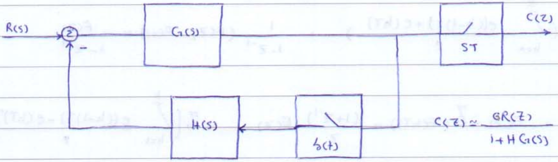
$$C(z) = \frac{G(z)\,R(z)}{1 + G(z)\,H(z)}$$



$$C(z) = \frac{G_1(z)\,G_2(z)\,R(z)}{1 + G_1(z)\,G_2^{H}(z)}$$



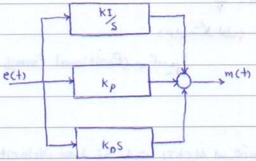
$$C(Z) = \frac{G_2(Z)RG_1(Z)}{1 + G_1G_2H(Z)}$$

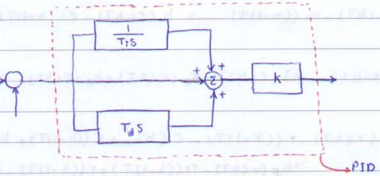


$$C(Z) = \frac{GR(Z)}{1 + HG(S)}$$

* محاسبه تابع تبدیل کنترل کننده PID دیجیتال :

$$m(t) = k\left[e(t) + \frac{1}{T_i}\int_0^t e(t)\,dt + T_d\frac{de(t)}{dt}\right]$$ در شکل آنالوگ





روش اول : فرض بر انتگرال گرفتن به روش ذوزنقه‌ای و مشتق گیری به روش تفاضل دو نقطه‌ای :

$$* \; m(kT) \simeq K(e(kT)) + \frac{T}{T_i}\left(\frac{e(0)+e(T)}{2} + \frac{e(T)+e(2T)}{2} + \dots + \frac{e(k-1)T + e(kT)}{2}\right) + \dots$$

$$m(kT) \simeq K(e(kT)) + \frac{T}{T_i}\sum_{h=1}^{k} \frac{e((h-1)T)+e(hT)}{2} + \frac{T_d}{T}(e(kT)) - e((k-1)T)$$

$$\frac{e(h-1)T + e\,h(T)}{2} \simeq F(hT) \; : \; F(0) = 0$$ تعریف می‌کنیم :

$$Z\left(\sum_{h=0}^{k} \frac{e((h-1)T)+e(hT)}{2}\right) \longrightarrow \frac{1}{1-z^{-1}}(F(z) - F(0)) \simeq \frac{F(z)}{1-z^{-1}}$$

$$\text{but}: \; F(z) = Z(F(hT)) \simeq \frac{(1+z^{-1})}{2}E(z) \longrightarrow Z\left[\sum_{h=1}^{k} \frac{e((h-1)T) - e(hT)}{2}\right] \simeq \frac{1+z^{-1}}{2(1-z^{-1})}E(z)$$

$$M(z) \simeq K\left(1 + \frac{T}{2T_i}\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}} + \frac{T_d}{T}(1-z^{-1})\right)E(z) \longrightarrow$$

$$K\left(1 - \frac{T}{2T_i}\right) + \frac{T}{T_i}\frac{1}{1-z^{-1}} + \frac{T_d}{T}(1-z^{-1})E(z) \longrightarrow \left(K_p + \frac{K_I}{1-z^{-1}} + K_D(1-z^{-1})\right)E(z)$$

(برای شکل دوم)

$$\begin{cases} K_p \simeq K - \dfrac{K_I}{2T_i} \longrightarrow K - \dfrac{K_i}{2} \\ K_I \simeq \dfrac{KT}{T_i} \\ K_D \simeq K\dfrac{T_d}{T} \end{cases}$$

(برای شکل اول)

شکل بدست آمده برای کنترل کننده را (Positional Form) می‌نامیم :

روش دوم : برای شکل (Velocity Form) معیار تغییرات $M(kT)$ است که به عنوان مثال $\nabla m(kT)$ را در نظر می‌گیریم.

$$* \; \nabla m(kT) \simeq m(kT) - m((k-1)T) \longrightarrow K(e(kT) - e((k-1)T)) + \frac{T}{2T_i}(e(kT) + e(k-1)T) + \dots$$

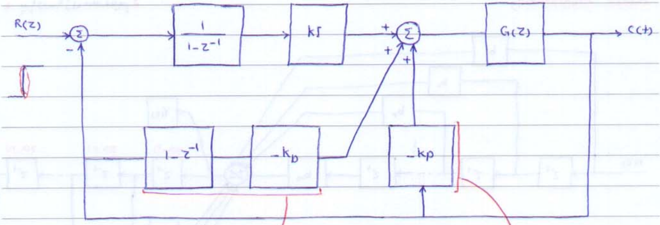
$$K_p(e(kT) - e(k-1)T) + K_I(e(kT) + K_D(e(kT) + K_D(e(kT) - 2e((k-1)T) + e((k-1)T) \longrightarrow$$

$$\nabla m(kT) \simeq K_p(r(kT) - r((k-1)T) - c(kT) + c((k-1)T) + K_I(r(kT) - c(kT)) +$$
$$K_p(r(kT) - 2r((k-1)T) + r((k-2)T) - c(kT) + 2c((k-1)T) - c((k-2)$$

اگر واحدهای شامل ۲ را در ضرایب (k_D و k_P) صرف نظر کنیم،

$$*\nabla_m(kT) \simeq -k_P\,(C(kT)-C((k-1)T)) + k_I\,(r(kT)-C(kT)) - k_D\,(C(kT)-2C((k-1)T)+$$

$$M(z) \simeq -k_P\,(C(z)) + k_I\,\frac{R(z)-C(z)}{1-z^{-1}} - k_D\,(1-z^{-1})\,C(z)$$



این را از فروجی گرفتیم

بهره را از فروجی گرفتیم

derivative kick (مشتق را جابجا کردیم)

Proportional kick (اثر جهش در فروجی را کاهش دادیم)

* پیاده‌سازی کنترل کننده‌ها (فیلترهای) دیجیتال:

فرم کلی کنترل کننده‌ها به صورت ذیل است:

$$G(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \rightarrow \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \cdots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \cdots + a_n z^{-n}}$$

که مستلزم پیاده‌سازی آنها بلوک تأخیر $\xrightarrow[X(z)]{X(k)} \boxed{} \xrightarrow[z^{-1}X(z)]{X(k-1)}$ است.

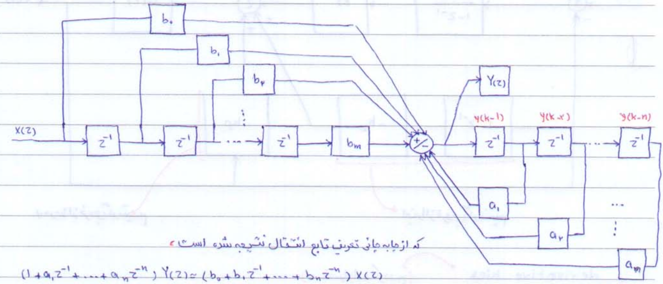
به عنوان مثال برای کنترل کننده‌های PID داشتیم:

$$G_D(s) \simeq \frac{(k_P+k_I+k_D)-(k_P+2k_D)z^{-1}+k_D z^{-2}}{1-z^{-1}} \longrightarrow \frac{b_0+b_1 z^{-1}+b_2 z^{-2}}{1+a_1 z^{-1}+a_2 z^{-2}}$$

$$a_1 \simeq -1 \;،\; a_2 \simeq 0 \;،\; b_0 \simeq k_P+k_I+k_D \;،\; b_1 \simeq -(k_P+2k_D) \;،\; b_2 \simeq k_D$$

Direct Programming

* پیاده‌سازی مستقیم:



که از جابه‌جائی تعریف تابع انتقال نتیجه شده است:

$$(1+a_1 z^{-1}+\dots+a_n z^{-n})\,Y(z) = (b_0+b_1 z^{-1}+\dots+b_n z^{-n})\,X(z)$$

* تعداد عناصر تأخیری استفاده شده در این روش $(m+n)$ است، معمولاً به جهت بالا بردن بازده حافظه از عناصر تأخیری کمتری استفاده می‌کنند، همچنین تعداد گره‌های جمع کننده می‌تواند معیاری برای انتخاب روش محاسبات باشد؛ سایر معیارها می‌تواند براساس خطای کوانتیزه شدن اطلاعات و ضرایب ها انباشته خطا و مکان واقعی قطبها و صفرها باشد.

این بدین منظور است که بدلیل کمبود حافظه میکروکنترلرها و میکروپرسسورها باعث می‌شود روش محاسبه در مقدار خروجی تأثیرگذار باشد، ونسبت به سیستمهای کامپیوتری اعداد و خروجی متفاوتی بدست آید.

Standard Programming

* پیاده سازی استاندارد:

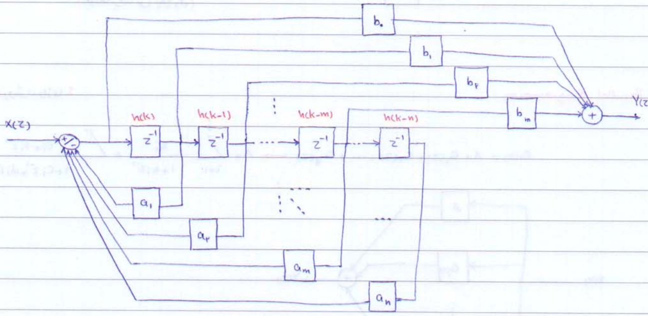
اگر رابطهٔ تابع انتقال را به صورت ذیل بازنویسی کنیم:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{Y(z)}{H(z)}\cdot\frac{H(z)}{X(z)} \longrightarrow (b_0+b_1 z^{-1}+\dots+b_m z^{-m})\,\frac{1}{1+a_1 z^{-1}+\dots+a_n z^{-n}}$$

که می‌توان نوشت:

$$Y(z) = b_0 H(z) + b_1 z^{-1} H(z) + \dots + b_m z^{-m} H(z)$$

$$H(z) = X(z) - a_1 z^{-1} H(z) - \dots - a_n z^{-n} H(z)$$



Series Programming

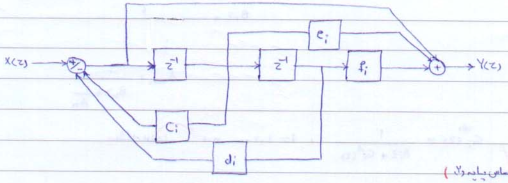
* پیاده‌سازی سری:

اگر تابع انتقال مورد نظر را به بلوک‌های کسری دلخواه تجزیه کنیم (خصوصاً بلوک‌های پایه مرتبه ۱ و ۲)

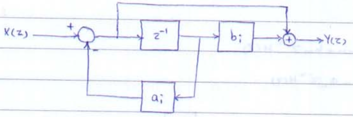
$$G(z) = G_1(z)\, G_2(z) \dots G_p(z) \quad ; \quad G(z) = k \prod_{i=1}^{j} \frac{1+b_i z^{-1}}{1+a_i z^{-1}} \prod_{i=j+1}^{p} \frac{1+e_i z^{-1}+f_i z^{-2}}{1+C_i z^{-1}+d_i z^{-2}}$$

$$X(z) \to \boxed{G_1} \to \boxed{G_2} \to \dots \to \boxed{G_p} \to Y(z)$$

که در آن هر یک از بلوک‌ها را می‌توان مثلاً به روش استاندارد یا مستقیم یا هر روش دیگر پیاده‌سازی شود:



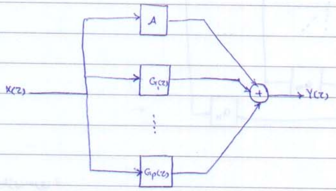
(بلوک‌ها بر اساس پایه ۲)



(بلوکها براساس پلی‌ها)

* روش موازی: Parallel Programming

$$G(z) \simeq A + G_1(z) + G_2(z) + \dots + G_q(z) \longrightarrow A + \sum_{i=1}^{j} \frac{b_i}{1+a_i z^{-1}} + \sum \frac{c_i + f_i z^{-1}}{1 + c_i z^{-1} + d_i z^{-2}}$$



* روش نردبانی: ladder Programming

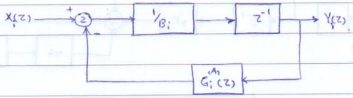
$$G(z) \simeq A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{\ddots \; A_{n-1} + \cfrac{1}{B_n z + \cfrac{1}{A_n}}}}}}$$

بخش های پایه سازنده:

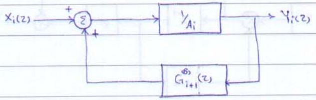
$$G_i^{(B)}(z) \simeq \frac{1}{B_i z + G_i^{(A)}(z)} \quad , \quad i \simeq 1, 2, \dots, n-1$$ (شکل اول)

$$G_i^{(A)}(z) \simeq \frac{1}{A_i + G_{i+1}^{(B)}(z)} \quad , \quad i \simeq 1, 2, \dots, n-1$$ (شکل دوم)

بخش حالت انتهایی $\rightarrow G_n^{(B)}(z) \approx \dfrac{1}{B_n z + \dfrac{1}{A_n}}$



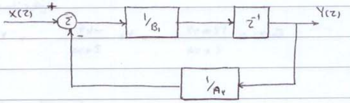
(شکل اول)



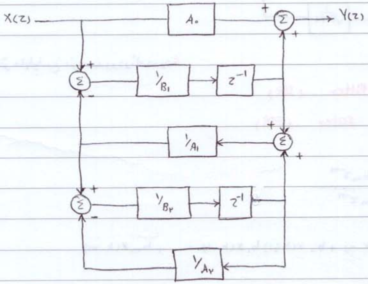
(شکل دوم)

به عنوان مثال اگر $n=2$ باشد، آنگاه خواهیم داشت:

$$G(z) = A_0 + \cfrac{1}{B_1 z + \cfrac{1}{A_1 + \cfrac{1}{B_2 z + \cfrac{1}{A_2}}}}$$



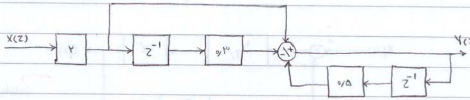
$$G_2^{B}(z) \approx \frac{1}{B_2 z + \frac{1}{A_2}} \rightarrow \frac{A_2}{1 + A_2 B_2 z}$$



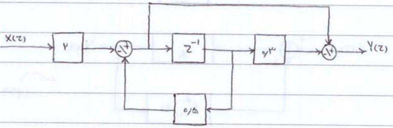
مثال ۴: تابع انتقال G(z) را به روش مستقیم و استاندارد پیاده سازی کنید.

$$G(z) = \frac{2 - 0.6 z^{-1}}{1 + 0.5 z^{-1}}$$

(Direct Programming)

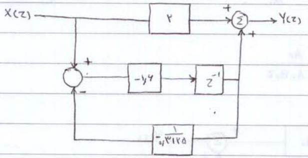


(Standard Programming)



مثال ۵: تابع انتقال G(z) را در ذیل را به روش نردبانی پیاده سازی کنید.

$$G(z) = \frac{2z - 0.6}{z + 0.5} \longrightarrow 2 + \frac{-1.6}{z + 0.5} \longrightarrow 2 + \cfrac{1}{0.625 z + \cfrac{1}{-3.2}}$$



* فیلتر ها با پاسخ ضربه محدود و نامحدود:

Infiniti impulse Response filter (IIR)

Finite impulse Response filter (FIR)

$$G(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}}$$

$$y(k) = -a_1 y(k-1) + \dots + a_n y(k-n) + b_0 x(k) + b_1 x(k-1) + \dots + b_m x(k-m)$$

* پیاده‌سازی فیلتر با پاسخ ضربه محدود (FIR):

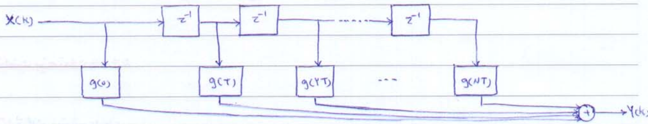
یک ایده برای بیان فیلتر، پاسخ ضربه آن است؛ بر این اساس اگر پاسخ ضربه را بصورت $g(kT)$ و در اختیار داشته باشیم (رشته وزنی)

$$g(kT) \simeq \sum_{h=0}^{k} g(hT)\, x(kT-hT) \longrightarrow g(0)\,x(kT) + g(T)\,x((k-1)T) + \dots + g(kT)\,x(0)$$

که در آن $x(kT)$ بصورت جمع کانولوشن بیان شده است، در شکل عملی نمی‌توان تمامی پاسخ $g(kT)$ را در نظر گرفت، اگر برای این منظور تنها (N) مقدار متوالی پاسخ ضربه را در نظر بگیریم، آنگاه عملاً جمع کانولوشن را تنها برای ($N+1$) جمله یا مقدار ورودی نوشته‌ایم.

$$g(kT) \simeq g(0)\,x(kT) + g(T)\,x((k-1)T) + \dots + g(NT)\,x((k-N)T)$$

تبدیل Z : $Y(z) \simeq g(0)\,X(z) + g(T)\,z^{-1}\,X(z) + \dots + g(NT)\,X(z)\,z^{-N}$



* نکاتی که در مورد فیلتر FIR باید در نظر گرفت:

۱) این فیلتر غیر بازگشتی است، لذا (بدلیل عدم وجود فیدبک) انباشته خطا ناشی از مقادیر ذخیره شده قبلی وجود ندارد.

۲) بدلیل عدم وجود فیدبک، پیاده‌سازی مستقیم و استاندارد یکسان نیست؛ همچنین پیاده‌سازی می‌تواند بکمک کانولوشن سریع (FFT) انجام شود.

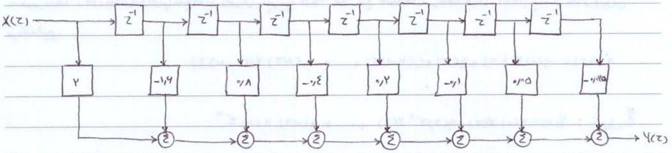
۳) قطبهای این فیلتر همگی در مبدأ هستند و لذا همواره پایدار است.

۴) اگر سیگنال ورودی حاوی فرکانسهای بالا باشد آنگاه تعداد عناصر تأخیر در بلوک (FIR) بالا می‌رود و در نتیجه تأخیر هم افزایش می‌یابد که نقطه ضعف (FIR) در مقابل (IIR) است.

مثال: فرض کنید تابع انتقال $G(z) \simeq \frac{2-0.6z^{-1}}{1+0.5z^{-1}}$ را بخواهیم به صورت (FIR) پیاده‌سازی کنیم، که برای نمونه می‌توان به کمک تقسیمات متوالی یا هر روش دیگر رشته وزنی را محاسبه کنیم.

$$G(z) \simeq 2 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2} - 0.4z^{-3} + 0.2z^{-4} - 0.1z^{-5} + 0.05z^{-6} - 0.025z^{-7} + \dots \longrightarrow \frac{Y(z)}{X(z)}$$

که در این مثال اگر $(N=7)$ درنظر بگیریم، چنین خواهد بود.



* نگاشت بین صفحات S و Z:

نکته: فرکانس نمونه‌برداری:

در طراحی کنترلر فرکانس نمونه‌برداری اولین عاملی است که با آن برخورد می‌کنیم، که فرکانس نه خیلی زیاد باشد، چراکه سیستم باعث پیوسته بودن حالت می‌شود و سرعت فرکانس بالا می‌رود و خیلی کم نباشد که اساساً باعث ناپایداری سیستم شود؛ به عبارتی دیگر چون تأخیر داریم امکان دارد باعث ناپایداری شود.

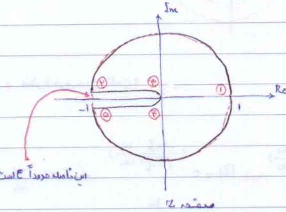
دیده‌ایم که رابطهٔ (Z و S) بصورت $Z=e^{TS}$ بیان شده است،

$$Z=e^{TS} \longrightarrow e^{T(\sigma+j\omega)} \longrightarrow e^{T\sigma}\, e^{Tj\omega} \longrightarrow \underbrace{e^{\sigma T}}_{\text{اندازه}}\; \underbrace{e^{j(T\omega+2k\pi)}}_{\text{(زاویه) فاز}}$$

در این عبارت می‌بینیم که فرکانس هایی که به میزان $(\frac{2\pi}{T})$ متفاوت باشد، بروی یک نقطه در صفحه Z تصویر می‌شود، یعنی برای هر مقدار (Z) می‌توان بینهایت (S) معادل درنظر گرفت.

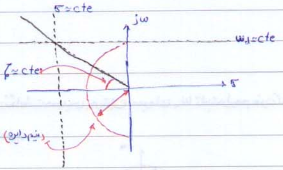
اگر بخش نیم صفحه دست چپ S را درنظر بگیریم:
$$\sigma<0 \longrightarrow |Z|=e^{T\sigma}<1$$
و در محدود $\sigma=0$ یعنی $(1=e^{0T})$ به معنی آنست که محور ($j\omega$) بروی دایره به مرکز مبدأ مختصات در صفحه Z تصویر می‌شود و در نتیجه شرط پایداری سیستم برای سیستم‌های گسسته بصورت $|Z|<1$ درنظر گرفته می‌شود.

از آنجاکه تصویر از Z به S یکتا نیست، لذا صفحه S به نوارهایی تقسیم می‌شود که در بازه اصلی هر نقطه را در جهت مثلثاتی دور بزنیم مسیر متعادل آن در صفحه Z مطابق تصویر مشاهده می‌شود.



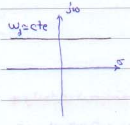
* نحوه تصویر مسیرهای رایج در صفحه S به Z :

تمامی قطب‌هایی که دارای jω ثابت است، فرکانس میرایی ثابت ولی (Over Shot) آن تغییر می‌کند و تمامی قطب‌های که دارای σ ثابت باشد دارای زمان نشست ثابت می‌باشد.

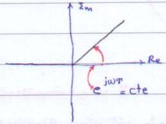


* خطوط σ ثابت : ($e^{T s}$)

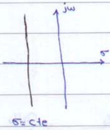
* خطوط ω_d ثابت : ($e^{j\omega T}$)



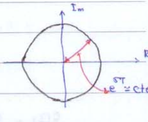
(صفحه S)



(صفحه Z)

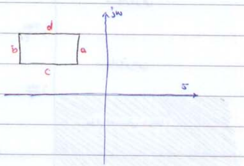


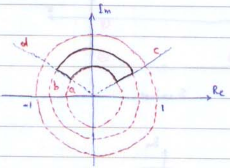
(صفحه S)



(صفحه Z)

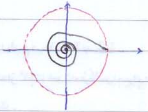
* برای نمونه در شکل‌های زیر در صفحه (s ، Z) نمایش داده شده است:

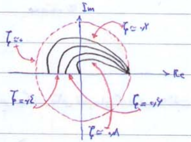




* خطوط ضریب میرایی ثابت:

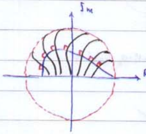
$$\begin{cases} S = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \longrightarrow -\zeta\omega_n + j\omega_d \\ Z = e^{TS} \longrightarrow e^{(-\zeta\omega_n T + j\omega_d T)} \longrightarrow e^{\left(-\frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s} + j2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)} \longrightarrow |Z| = e^{\left(\frac{-2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\frac{\omega_d}{\omega_s}\right)} \quad \angle Z = 2\pi\frac{\omega_d}{\omega_s} \end{cases}$$





* خطوط ω_n ثابت:

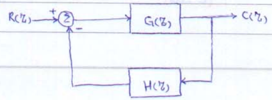
برطبق اصول (Conformal maping) (نگاشت همدیسی) می‌توان مسیرهای ω_n ثابت را رسم نمود که برای اینکار کافیست نمودار ζ رسم شده در این صورت خط ω_n عمود بر ζ خواهد بود.



* پایداری در سیستم‌های حلقه بسته در صفحه Z:

$$\frac{C(Z)}{R(Z)} = \frac{G(Z)}{1+GH(Z)} \longrightarrow \frac{Q(Z)}{P(Z)}$$

قطبها از $P(Z)=1+GH(Z)$ معادله مشخصه بدست می‌آیند (ریشه‌ها)



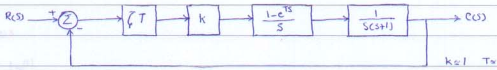
* قواعد پایداری :

۱) برای پایداری سیستم، قطبهای حلقه بسته (ریشه های معادله مشخصه) باید درون دایره واحد باشد، قطبها خارج دایره واحد منجر به ناپایداری می شوند.

۲) اگر قطب ساده ای در $z=1$ یا $z=-1$ (شامل هر دوی شود) قرار گیرد، سیستم پایدار مرزی است، همچنین اگر یک زوج قطب روی دایره واحد قرار گیرد، سیستم پایدار مرزی خواهد بود؛ هرگونه قطب مکرر بر روی دایره واحد سیستم را ناپایدار می کند.

۳) صفرهای حلقه بسته پایداری را متأثر نمی کند، پس محل آنها در صفحه z تأثیری بر روی پایداری ندارد.

مثال: برای سیستم ذیل پایداری را بررسی کنید.



* $G(s) = \frac{1-e^{-TS}}{S}\,\frac{1}{S(S+1)} \longrightarrow G(z) = Z\left(\frac{1-e^{-TS}}{S}\,\frac{1}{S(S+1)}\right) \longrightarrow G(z) = \frac{0.3679z + 0.2642}{(z-0.3679)(z-1)}$

معادله مشخصه : $(z-0.3679)(z-1) + 0.3679z + 0.2642 = 0 \longrightarrow z^2 - z + 0.6321 = 0 \longrightarrow z_1 = 0.5 - j0.6181$, $z_2 = 0.5 + j0.6181$

* $|z|<1$ است پس سیستم حلقه بسته پایدار است

* روش (Jury) برای آزمون ریشه های سیستم حلقه بسته :

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \dots + a_{n-1} z + a_n$$

تعریف می کنیم :

$$b_k = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1-k} \\ a_0 & a_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, \dots, n-1$$

$$q_k = \begin{vmatrix} p_3 & p_{3-k} \\ p_0 & p_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0,1,2$$

$$c_k = \begin{vmatrix} b_{n-1} & b_{n-2-k} \\ b_0 & b_{k+1} \end{vmatrix}, \quad k = 0, \dots, n-2$$

(جدول در صفحه دیگر)

ردیف	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4	....	z^{n-2}	z^{n-1}	z^n
1	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	a_{n-3}	a_{n-4}	....	a_2	a_1	a_0
2	a_0	a_1	a_2	a_3	a_4	....	a_{n-2}	a_{n-1}	a_n
3	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	b_{n-4}	b_{n-5}	....	b_2	b_1	b_0
4	b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	....	b_{n-2}	b_{n-1}	b_n
⋮	⋮						⋮		
2n-4	p_0	p_1	p_2	p_3					
2n-3	q_2	q_1	q_0						

* شرط پایداری:

۱) $|a_n| < |a_0|$

۲) $P(z)\big|_{z=1} > 0$

۳) $P(z)\big|_{z=-1}$ → >0 for (n) even ، <0 for (n) odd

۴) $|b_{n-1}| > |b_0|$

$|c_{n-2}| > |c_0|$

⋮

$|q_2| > |q_0|$

مثال: برای چند جمله‌ای های ذیل پایداری را بررسی کنید:

1) $P(z) = a_0 z^4 + a_1 z^3 + a_2 z^2 + a_3 z + a_4$

$a_0 = 1$
$a_1 = -1.2$
$a_2 = 0.07$
$a_3 = 0.3$
$a_4 = -0.08$

شرط اول $\rightarrow |a_4| < |a_0| \rightarrow 0.08 < 1$ ✓

شرط دوم $\rightarrow P(1) = 1 - 1.2 + 0.07 + 0.3 - 0.08 = 0.09 > 0$ ✓

شرط سوم $\rightarrow P(-1) = 1 + 1.2 + 0.07 - 0.3 - 0.08 = 1.89 > 0$ ✓

* جدول مبحث در صفحه بعد قرار دارد:

Subject . Year. Month. Day.

	z^0	z^1	z^2	z^3	z^4
1	-0.08	0.3	0.07	-1.2	1
2	1	-1.2	0.07	0.3	-0.08
3	-0.994	1.176	-0.754	-0.204	
4	-0.204	-0.754	1.176	-0.994	
5	0.946	-1.184	0.315		

$|b_3| = 0.994 > |b_0| = 0.204$ ✓

$|c_2| = 0.946 > |c_0| = 0.315$ ✓

(پس سیستم با این معادله مشخصه پایدار است)

۲) $P(z) = z^3 - 1.3z^2 + 0.08z + 0.24$

$|a_3| < |a_0|$ ✓

$P(1) = 1 - 1.3 - 0.08 + 0.24 = -0.14$ ✗ (پس سیستم ناپایدار است)

۳) $G(z) = \dfrac{k(0.3679z + 0.2642)}{(z - 0.3679)(z-1)}$

حلقه بسته $\longrightarrow \dfrac{C(z)}{R(z)} = \dfrac{k(0.3679z + 0.2642)}{z^2 + (0.3679k - 1.3679)z + 0.3679 + 0.2642k} \longrightarrow$ معادله مشخصه $P(z) = 0$

$|a_2| < |a_0| \longrightarrow |0.3679 + 0.2642k| < 1 \longrightarrow 2.3925 > k > -5.1775$

$P(1) = 1 + (0.3679k - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642k > 0 \longrightarrow k > 0$

$P(-1) = 1 - (0.3679k - 1.3679) + 0.3679 + 0.2642k > 0 \longrightarrow 0 < k < 0.3925$

* نتیجه نهایی:

برای $k = 2.3925$ سیستم پایا مرزی است (نوسانات پایداری) که فرکانس آن از طریق قراردادن k و محاسبه ریشه معادله ($z^2 - 0.4872z + 1 = 0$) بدست می‌آید.

$z = 0.2439 \pm j0.9698$

با توجه $T = 1$ پس ($\omega_d = \frac{\omega_s}{2\pi} \angle z$) پس ($\omega_d = 1.3244 \ rad/s$)

* روش روث هرویتز اصلاح شده:

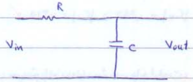
اگر در عبارت $P(z)$ به جای (z، $z = \frac{w+1}{w-1}$ $\longleftarrow$ ($w = \frac{z+1}{z-1}$) قرار دهیم، که دایره واحد از صفحه z را به نیم صفحه سمت چپ صفحه w تصویر کند، می‌توان از روش روث هرویتز استفاده کرد.

ARSH

* طراحی سیستم‌های گسسته زمان به کمک روش‌های تبدیل:

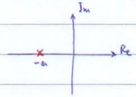
ب) بدست آوردن معادل گسسته سیستم پیوسته:

نکته: در بخش‌های ذیل بروی مثال



$$\frac{Y(S)}{X(S)} = \frac{1}{RCs+1} \rightarrow \frac{a}{s+a}$$

که معادل دیفرانسیل آن ($\frac{dy}{dt}+ay=ax$) مقایسه انجام می‌شود.



۱) روش تفاضلی پس رو:

$$\frac{dy}{dt} = -ay+ax \longrightarrow \int_0^t \frac{dy(t)}{dt}dt = -a\int_0^t y(t)dt + a\int_0^t x(t)dt$$

حال داریم:

به جای t مقدار kT را می‌گذاریم در این صورت داریم

$$y(kT)-y(0) = -a\int_0^{kT} y(t)dt + a\int_0^{kT} x(t)dt$$

همچنین برای یک های پر بودنبل:

$$y((k-1)T)-y(0) = -a\int_0^{(k-1)T} y(t)dt + \int_0^{(k-1)T} x(t)dt \longrightarrow$$

از ترکیب دو معادله فوق $\longrightarrow$ $y(kT)-y((k-1)T) = -a\int_{(k-1)T}^{kT} y(t)dt + a\int_{(k-1)T}^{kT} x(t)dt$

اگر مقدار انتگرال را در مدت انتگرال تقریباً ثابت فرض کنیم:

$$y(kT) = y((k-1)T) - aT(y(kT)-x(kT)) \longrightarrow y(z) = z^{-1}y(z) - aT(y(z)-x(z)) \longrightarrow$$

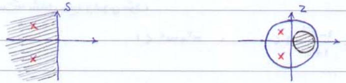
$$\frac{y(z)}{x(z)} = G_D(z) \longrightarrow \frac{aT}{1-z^{-1}+aT} \longrightarrow \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{T}+a}$$

* نتیجه می‌گیریم که در این روش در تبدیل لاپلاس بجای s مقدار $(\frac{1-z^{-1}}{T})$ را قرار می‌دهیم:

$S = \frac{1-z^{-1}}{T}$ در این صورت ناحیه پایداری در حوزه پیوسته نیم صفحه سمت چپ به دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}$ و به مرکز $(\frac{1}{2}, 0)$ تصویر می‌شود و دلیل آن است که

$$Re(\frac{1-z^{-1}}{T}) < 0 \longrightarrow \frac{\sigma^2-\sigma+\omega^2}{\sigma^2+\omega^2} < 0 \longrightarrow (\sigma^2-\frac{1}{2})^2+\omega^2 < (\frac{1}{2})^2$$

این روش ساده است ولی سیستم پایدار پیوسته به سیستم پایدار گسسته منجر می‌شود، اما اعوجاج در پاسخ گذرا رؤیت می‌گردد؛
بطوری که امکان دارد قطبهای مورد نظر در منطقه مورد نظر و ناحیه بدست آمده نباشد.



۲) روش تفاضلی پیش‌رو:

با مقایسه با فرایند طی شده در بخش قبلی (تفاضل پس‌رو) خواهیم داشت:

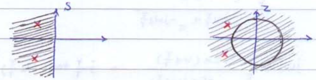
$$y(kT) \rightarrow y((k-1)T) - aT\,(y((k-1)-T)) - x((k-1)T)) \rightarrow$$

$$y(kT) = (1-aT)\,y((k-1)T) + aT\,x((k-1)T) \rightarrow y(z) = (1-aT)\,z^{-1}y(z) - aT\,z^{-1}x(z) \rightarrow$$

$$\frac{y(z)}{x(z)} = G_D(z) \rightarrow \frac{aT z^{-1}}{1-(1-aT)z^{-1}} \rightarrow \frac{a}{\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}} + a}$$

* در این روش نیز به جای S مقدار $\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}$ را قرار می‌دهیم؛
این روش نیز مشکل دارد و اینست که امکان دارد سیستم بدست آمده از این روش ناپایدار باشد.

$$R(z) < 1 \rightarrow Re\left(\frac{1-z^{-1}}{Tz^{-1}}\right) < 0$$



۳) روش تبدیل (Tustin) دوخطی یا انتگرال ذوزنقه‌ای:

که به جای $\int_{(k-1)T}^{kT} u(t)dt$ می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{2}(u(kT) + u((k-1)T))$$

$$y(kT) = y((k-1)T) - \frac{aT}{2}(y(kT) + y((k-1)T)) + a\frac{T}{2}(x(kT) + x(k-1)T) \rightarrow$$

$$y(z) = z^{-1}y(z) - a\frac{T}{2}(y(z) + z^{-1}y(z)) + a\frac{T}{2}(x(z) + z^{-1}x(z)) \rightarrow$$

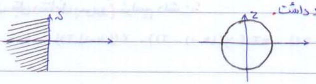
$$\frac{y(z)}{x(z)} = G_D(z) \rightarrow \frac{a\frac{T}{2}(1-z^{-1})}{(1-z^{-1}) + \frac{aT}{2}(1-z^{-1})} \rightarrow \frac{a}{\frac{2}{T}\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right) + a}$$

* در این صورت در تبدیل لاپلاس کافیست $\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ را نوشت؛

و این بدان معنی است که شامل دایره واحد می‌شود؛

ناحیه پایداری $\longrightarrow Re(\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}})<0 \longrightarrow \sigma^2+\omega^2<1$

ب) در این روش ولی از این تبدیل از سیستم پیوسته پایدار به سیستم گسسته پایدار می‌رسیم؛ و همچنین محور ($j\omega$) در حوزه پیوسته بر روی محیط دایره واحد در حوزه گسسته تصویر می‌شود؛ اما توجه شود که نقاط دیگر نسبت به ($Z=e^{Ts}$) روی هم نمی‌نشینند؛ ولذا اعوجاج در پاسخ وجود خواهد داشت.



۴) روش تبدیل دوخطی (Frequency Prewarping):

* بررسی رابطه دو فرکانس در حوزه‌های پیوسته و گسسته:

$$S=j\omega_a \ ، \ Z=e^{Tj\omega_d} \longrightarrow S=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} \longrightarrow j\omega_a=\frac{2}{T}\frac{1-e^{-Tj\omega_d}}{1+e^{-Tj\omega_d}} \longrightarrow$$

$$\frac{2}{T}\frac{e^{j\omega_d\frac{T}{2}}-e^{-j\omega_d\frac{T}{2}}}{e^{j\omega_d\frac{T}{2}}+e^{-j\omega_d\frac{T}{2}}}$$

(فرکانس مورد نظر در حوزه پیوسته)

$$j\omega_a=\frac{2}{T}\frac{2j\sin(\omega_d\frac{T}{2})}{2\cos(\omega_d\frac{T}{2})} \longrightarrow j\frac{2}{T}\tan(\omega_d\frac{T}{2}) \longrightarrow \omega_a=\frac{2}{T}\tan(\omega_d\frac{T}{2})$$

* می‌توان گفت که اگر ($\omega_d T$) کوچک باشد؛

$$\omega_d T = \frac{2\pi}{\omega_s} \ll 1 \longrightarrow \frac{\omega_d}{\omega_s} \ll \frac{1}{2\pi} \longrightarrow \omega_a \simeq \frac{2}{T}\omega_d\frac{T}{2} \longrightarrow \omega_a \simeq \omega_d$$

ب) لذا، در اینجا باید در نظر گرفتن فرکانس ویژه که معمولاً فرکانس قطع گوشه (افت $-3db$) است، پاسخ فرکانسی در حوزه گسسته و پیوسته را تنظیم می‌کنیم؛ و سپس تبدیل دوخطی را انجام دهیم.

مثال: برای یک فیلتر پایین‌گذر $G(s)$ روابط فرکانسی را بدست آورید؛

$$G(s)=\frac{a}{s+a} \longrightarrow G'(s)=\frac{\frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}}{s+\frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}} \longrightarrow$$

تبدیل دوخطی: $G_D(z)=\dfrac{\frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}}{\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}+\frac{2}{T}\tan\frac{aT}{2}}$

$$G_D(z) = \frac{\tan\frac{aT}{2}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \tan\frac{aT}{2}}$$

* که همین رابطه برای فیلتر بالا گذر $H(s) = \frac{s}{s+a}$ که با زهم فرکانس قطع (a) است، داریم:

$$H(z) = \frac{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}{\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}} + \tan\frac{aT}{2}}$$

۵) روش پاسخ ضربه ثابت:

ب) بگونه‌ای تبدیل می‌کنیم که پاسخ ضربه‌ها معادل باشند.

$$g_D(kT) = T\,g(t)\Big|_{t=kT} \longrightarrow G_D(z) = \mathcal{Z}\,(T g(t)) = T G(z)$$

برای نمونه برای فیلتر قبلی داریم:

$$G_D(z) = T G(z) \longrightarrow \frac{Ta}{1 - e^{-aT} z^{-1}}$$

نکته: این روش نیز به روش تبدیل Z مرسوم است چون از تبدیل Z بدست می‌آید: دیده ایم که در این حالت پاسخ فرکانسی حوزه گسسته شامل پاسخ فرکانسی حوزه پیوسته به اضافه بینهایت کپی‌های آن است و لذا تداخل فرکانسی می‌تواند رخ دهد. (alias)

۶) روش پاسخ پله ثابت:

$$\mathcal{Z}^{-1}\Big(\underbrace{G_D(z)\,\frac{1}{1-z^{-1}}}_{\text{پاسخ پله در حوزه گسسته}}\Big) \longrightarrow \underbrace{\mathcal{L}^{-1}\Big(G(s)\cdot\frac{1}{s}\Big)}_{\text{پاسخ پله در حوزه پیوسته}}\Big|_{t=kT} \longrightarrow$$

تبدیل Z می‌گیریم: $G_D(z)\frac{1}{1-z^{-1}} \longrightarrow \mathcal{Z}\big(\mathcal{L}^{-1}(G(s)\frac{1}{s})\big) \longrightarrow \mathcal{Z}\big(\frac{G(s)}{s}\big) \longrightarrow$

$$G_D(z) = 1-z^{-1}\ \mathcal{Z}\Big(\frac{G(s)}{s}\Big) \longrightarrow \mathcal{Z}\Big(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,G(s)\Big)$$

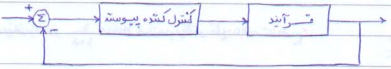
* که عبارت آخر معادل سیستم پیوسته به اضافه نمونه برداری و نگهدار مرتبه صفر است و از سیستم پایدار به پایدار می‌رسیم.

۷) روش انتقال قطب‌ها و صفرها:

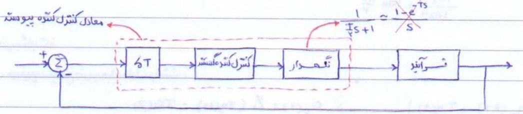
در این روش تابع را به صورت حاصل‌ضرب ترمهای مرتبه اول در می‌آوریم و برای هر ترم به صورت $(S+a_i)$ یعنی $(S=-a_i)$ با فرض $(Z=e^{TS})$ به $(Z=e^{-a_iT})$ تصویر می‌شود.

* توجه شود که صفرهای بینهایت به $(Z=-1)$ تصویر می‌شود، ضمناً پس از تصویر کردن بهره را نیز باید تنظیم نمود.

* طراحی کنترل کننده براساس بدست آوردن معادل گسسته کنترل کننده پیوسته:



$$\frac{1}{\frac{T}{2}S+1} \simeq \frac{1-e^{-TS}}{S}$$

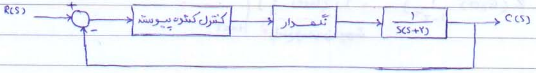


تقریب قابل استفاده برای (e^{-TS}) → $e^{-TS} \simeq \dfrac{1-\frac{TS}{2}+\frac{(TS)^2}{8}+\cdots}{1+\frac{TS}{2}+\frac{(TS)^2}{8}+\cdots}$ → $e^{-TS} \simeq \dfrac{1-\frac{TS}{2}}{1+\frac{TS}{2}}$

* اما چون بهره DC باید یک باشد به جای ($\frac{1}{\frac{T}{2}S+1}$) می‌گذاریم:

$$\frac{1-e^{-TS}}{S} = \frac{T}{\frac{T}{2}S+1}$$

مثال: برای سیستم ذیل یک کنترلر کننده گسسته طراحی شود که ($t_s = 2^s$ و $\zeta = 0.5$) باشد:



* پس قطب‌های غالب حلقه کنترل شده: $W_d = 3.464$ ، $W_n = 4$ ، $f_n = \frac{4}{2\pi} \simeq \frac{2}{\pi}$ (فرکانس هدف) و در نتیجه $T_n = \frac{\pi}{2}$ (پریود غالب قطب حلقه)

معمولاً فرکانس نمونه‌برداری بین ۵ تا ۱۰۰ برابر فرکانس قطع حلقه بسته می‌باشد (f_s حدوداً ۵ تا ۱۰۰ برابر f_n است)

$T_n \gg T$ ، $T = 0.2^s$

$$G(s) \simeq k\frac{S+2}{S+4}$$

نکته: درصورتی که حلقه بسته از فرایند تندتر باشد، جبرانساز (Lead) استفاده می‌شود و اگر حلقه بسته از فرایند کندتر باشد (Lag) استفاده می‌شود که در این حالت صفر جلوتر از قطب است پس قطب غالب است، ولی در حالت (Lead) صفر سیستم اعمالی جبرانساز غالب است.

Subject. Year. Month. Day.

* اینک به کمک روش انتقال صفرها و قطبها کنترل کننده را به حوزه گسسته می‌بریم:

$$\begin{cases} S=-4 \longrightarrow z = e^{-4} \simeq 0.449 \\ S=-2 \longrightarrow z = e^{-2T} \simeq 0.6703 \end{cases}$$

برای بهره DC : $k \simeq 13.57 \longrightarrow G_D(z) = 13.57 \left(\dfrac{z - 0.6703}{z - 0.449} \right)$

* این روش مناسب نیست چرا که امکان دارد باعث ناپایداری شود.

* بررسی پاسخ حالت دائم:

$e(t) = r(t) - b(t)$

$$e_{ss} = \lim_{t \to \infty} e(t) \longrightarrow \lim_{k \to \infty} e(kT) \longrightarrow \lim_{z \to 1} \left((1 - z^{-1}) E(z) \right)$$

اگر تعریف کنیم:

$$G(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left(\frac{G_p(s)}{s} \right)$$

$$GH(z) = (1 - z^{-1}) \mathcal{Z} \left(\frac{G_p(s) H(s)}{s} \right) \longrightarrow \frac{C(z)}{R(z)} = \frac{G(z)}{1 + GH(z)} \; : \; E(z) = R(z) - B(z) \longrightarrow R(z) - GH$$

$$E(z) = \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \; : \; e_{ss} = \lim_{z \to 1} \left((1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} R(z) \right)$$

* Static position error Constant :

$$e_{ss} = \lim_{z \to 1} \left((1 - z^{-1}) \frac{1}{1 + GH(z)} \cdot \frac{1}{1 - z^{-1}} \right) \longrightarrow \lim_{z \to 1} \frac{1}{1 + GH(z)}$$

تعریف می‌کنیم:

$$k_p = \lim_{z \to 1} GH(z) \longrightarrow e_{ss} = \frac{1}{1 + k_p} \; *$$

* Static Velocity error Constant :

$$R(z)=\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\ ;\quad e_{ss}=\lim_{z\to 1}\left((1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)}\frac{Tz^{-1}}{(1-z^{-1})^2}\right)\longrightarrow \lim_{z\to 1}\frac{T}{(1-z^{-1})GH(z)}$$

تعریف می‌کنیم:

$$K_v=\lim_{z\to 1}\frac{1-z^{-1}}{T}GH(z)\longrightarrow e_{ss}=\frac{1}{K_v}$$

* static acceleration error Constant :

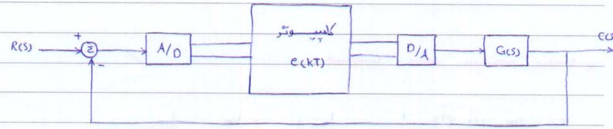
$$R(z)=\frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}\ ;\quad e_{ss}=\lim_{z\to 1}\left((1-z^{-1})\frac{1}{1+GH(z)}\frac{T^2(1+z^{-1})z^{-1}}{2(1-z^{-1})^3}\right)\longrightarrow \lim_{z\to 1}\frac{T^2}{(1-z^{-1})GH(z)}$$

تعریف می‌کنیم:

$$K_a=\lim\frac{(1-z^{-1})GH(z)}{T^2}\longrightarrow e_{ss}=\frac{1}{K_a}$$

* باید معمولاً با حالت دو تحلیلی و آن هم به صورتی که غالب باشد آن را بدست می‌آید؛ برای محاسبه تابع انتقال موردنظر؛ پس برای شناسی مشخصه درصورتی که به صورت بلوک باشد می‌توان آن را ورودی ضربه (که معمولاً عملی نیست) و یا ورودی پله اعمال کرد که در این حالت رابطهٔ ورودی و خروجی همان تابع انتقال است.

نکته: در هنگام کنترل کردن سیستم ما همواره تابع انتقال را داریم، و از روی آن فرآیند سیستم را کنترل می‌کنیم؛ برای نمونه در حالت کنترل دیجیتال داریم:



مثال: طراحی براساس مکان هندسی ریشه ها در حوزه گسسته، برای تابع انتقال یک سیستم که داریم:

$$G(s) = \frac{۱}{s(s+۲)}$$

واحد $(\sigma , \omega_d) \simeq \frac{rad}{s}$

اهداف کنترل خطی پیوسته:

$t_s = ۲^s$ ؛ $t_s = \frac{۴}{\sigma} \rightarrow \sigma = ۲\ \frac{rad}{s}$

$\sigma = \zeta \omega_n \rightarrow \omega_n \simeq ۴\ \frac{rad}{s}$

$\zeta = ۰/۵$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{۱ - \zeta^۲} \rightarrow \omega_d = ۳/۴۶۴\ \frac{rad}{s}$

فرض کنیم پریود نمونه برداری:

$T = ۰/۲s \rightarrow \omega_s \simeq ۱۰\pi \simeq ۳۱/۴۱$

نکته: برای بدست آوردن (ω_s) کافیست ۴ تا ۵ برابر (ω_n) را محاسبه کنیم و در این صورت برای (f_s) داریم:

$\omega_s = ۲\pi f_s \rightarrow f_s = \frac{\omega_s}{۲\pi}$

اگر در مدار قطب مختلط غالب وجود داشته باشد، باید فرکانس مورد نظر را بیشتر در نظر بگیریم تا اثر آن قطبها کمتر شود.

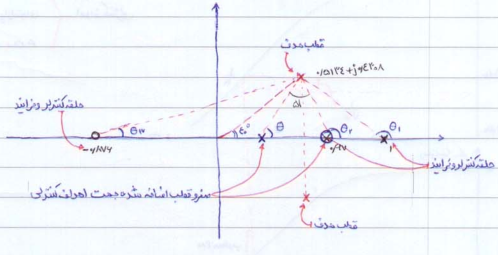
اهداف کنترل گسسته:

$|z| = e^{-T\sigma} \rightarrow e^{-T\zeta\omega_n} \rightarrow |z| = ۰/۹۷۰۳$

$\measuredangle z = T\omega_d \rightarrow \measuredangle z \simeq ۰/۶۹۲۸\ rad \rightarrow ۳۹/۶۹^\circ \simeq ۴۰^\circ$

$z = ۰/۵۱۳۴ \pm j$

$$G(z) = \mathcal{Z}\left(\frac{۱ - e^{-Ts}}{s}\frac{۱}{s(s+۲)}\right) \rightarrow G(z) = (۱ - z^{-۱})\mathcal{Z}\left(\frac{۱}{s^۲(s+۲)}\right) \rightarrow G(z) = ۰/۰۱۷\frac{z + ۰/۸۷۴}{(z-۱)(z-۰/۶۷)}$$



* یا باید یک صفر اضافه شود و یا باید یک صفر و قطب اضافه شود تا تفاوت زاویه ۵۱ درجه شود:

جمع زوایا $\rightarrow \underset{\theta_۳}{۱۷/۱^\circ} - \underset{\theta_۲}{۱۳۸/۵۲^\circ} - \underset{\theta_۱}{۱۰۹/۸۲^\circ} \simeq -۲۳۱/۲۶^\circ - (-۱۸۰) \simeq -۵۱$

$$G_D(z) = k\,\frac{z+\alpha}{z+\beta} \longrightarrow k\,\frac{z-0.67}{z-0.17}$$

* برای محاسبه قطب تابع هدف اضافه‌شده داریم:

$0.5134 - 0.3488 \simeq 0.1646 \longrightarrow$ فاصله قطب اضافه شده

$$\tan\theta = \frac{\text{ضلع مقابل}}{\text{ضلع مجاور}} \longrightarrow \text{ضلع مقابل} = \tan\theta \times \text{ضلع مجاور} \longrightarrow x = \frac{0.4308}{\tan 51^\circ} \longrightarrow x \simeq 0.3488$$

* همواره در مکان هندسی قطبها به سمت صفر کشیده می‌شود، پس در صورتی صفر درسمت راست صفحه که باشد، باعث می‌شود در بهره k زیاد، قطب به سمت راست تمایل پیدا کند و باعث ناپایداری سیستم شود.

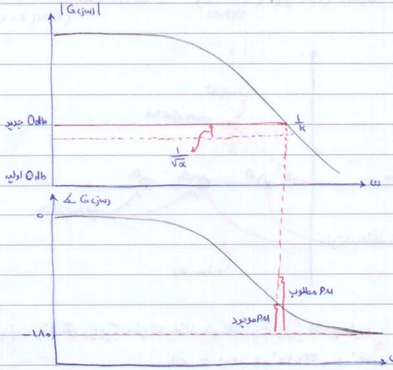
$$k = \frac{\text{حاصلضرب فاصله تا قطبها}}{\text{حاصلضرب فاصله تا صفرها}}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = 12.47\,\frac{1-0.67z^{-1}}{1-0.25z^{-1}} \longrightarrow y(k) - 0.25\,y(k-1) = 12.47\,(x(k) - 0.67\,x(k-1))$$

* همواره در مسائل سعی می‌شود به صورت پله بیان شود و نکات حائز اهمیت برای سیستم (t_r، t_s، t_p) مهم است.

* طراحی سیستم براساس پاسخ فرکانسی:

اهداف کنترلی:
- e_{ss}
- پارامترهای (t_r، t_s)
- P.O (فراجهش)



* هرگاه بیان می‌شود برای مثال ($t_s < 1^s$) دیل نمی‌شود، که مقدار آن را برای مثال (1^{ms}) در نظر گرفت؛ چراکه هم فرایند را دچار مشکل می‌شود و هم سیستم را مختل می‌کنیم، که برای مسین برای کاهش خطای مانا بهره را معمولاً افزایش نمی‌دهیم، چراکه پهنای باند افزایش و در مقابل سرعت سیستم افزایش می‌یابد که در این حالت باز هم باعث اختلال در سیستم می‌شود.

برای کاهش خطای مانا سعی می‌شود از انتگرال‌گیر استفاده شود یعنی مانند جبرانساز (لگ) که در آن قطب غالب بر صفر است و این برای حالت ورودی پله است.

نکته: البته اگر فرایند داشته باشد نیاز به قرار دادن در کنترلر نیست و در صورتی که فرایندی نیست آن را در کنترلر طراحی می‌کنیم و به عبارتی برای کاهش خطای (e_{ss}) به ورودی پله می‌توان یک قطب ($1-z^{-1}$) در مخرج کسر اضافه کرد.

* پس می‌توان گفت سرعت بیش از حد در مباحث کنترلی مضر است.

$$t_r \simeq \frac{0.8+2.5\zeta}{\omega_n}$$ برای مرتبه دوم

$$t_s = \frac{4}{\omega_n \zeta}$$

$$M_p = e^{-\left(\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)\pi} \longrightarrow MP \simeq P.O = 100\, e^{-\frac{\pi}{\tan\theta}}$$

(Percent overshoot)

گین (DC) انتگرال‌گیر بی‌نهایت است یعنی داریم:

انتگرالگیر Lag $\longrightarrow \frac{s+\beta}{s+\alpha}$ $\quad \frac{\beta}{\alpha} > 1$

مشتق‌گیر Lead $\longrightarrow \frac{\alpha\tau s+1}{\tau s+1}$

$$BW = \omega_n\sqrt{(1-2\zeta^2)+\sqrt{4\zeta^4-4\zeta^2+2}} \longrightarrow \text{If } \zeta = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad B.W =$$

* باید مقدار پهنای باند مطلوب در نظر گرفته شود، اگر پهنای باند زیاد باشد سرعت زیاد دارد؛ در مقابل هرچه پهنای باند کمتر باشد سرعت سیستم کند است که در حالت بهره یک یا 0db مد نظر است.

پس در حالت کندی سرعت می‌توان با افزایش k مقدار آن را افزایش داد؛ $PM = 100\zeta$ تقریباً ۷۰ سیستم مرتبه دوم

* هنگامی که از (لید) استفاده شود باعث می‌شود با تغییر خط (0db) باعث شود، پهنای باند مورد نظر تأمین شود.

PM(مطلوب) $-$ PM(موجود) $\simeq \varphi_m$

میزان فاز مورد نظر

$$\alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} \quad ; \quad T = \frac{1}{\omega_n\sqrt{\alpha}}$$

* برای طراحی (لگ) کافیست از صفر (اصلی) به اندازه (۱/۲) به عقب حرکت کنیم و صفر آن را قرار دهیم و بعد به اندازه ($\frac{\beta}{\alpha}$) می‌توان قطب آن را قرار دهیم.

* طراحی براساس پاسخ فرکانسی :

نخست رفتار یک سیستم گسسته را درحوزه فرکانسی بررسی می کنیم :

$$u(t) \longrightarrow \boxed{ST} \xrightarrow{u(kT)} \boxed{\text{Stable LTI} \quad \text{D.T.S}} \longrightarrow x(t)$$

* $u(t)=\sin(\omega t) \longrightarrow u(k)=u(kT)=\sin \omega kT$

$$U(z)=\mathcal{Z}(\sin wkT)=\frac{z\sin(\omega T)}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})} \longrightarrow X(z)=G(z)U(z) \longrightarrow \frac{z\sin(\omega T)}{(z-e^{j\omega T})(z-e^{-j\omega T})} \longrightarrow$$

$\frac{az}{z-e^{j\omega T}}+\frac{\bar{a}z}{z-e^{-j\omega T}}+$ (جملات ناشی از $G(z)$) $\longrightarrow$

* اگر رابطه را در $\left(\frac{z-e^{j\omega T}}{z}\right)$ ضرب کنیم دراین صورت داریم :

$G(z)\frac{\sin(\omega T)}{z-e^{-j\omega T}}=a+\frac{\bar{a}(z-e^{j\omega T})}{z-e^{-j\omega T}}+\frac{z-e^{j\omega T}}{z}$ — $G(z)$ جملات ناشی از $\longrightarrow$

* حال اگر $(z \longrightarrow e^{j\omega T})$ قرار دهیم دراین صورت داریم :

$a=G(z)\frac{\sin(\omega T)}{z-e^{-j\omega T}}\Big|_{z=e^{j\omega T}}=\frac{G(e^{j\omega T})}{2j}$ (جمله دوم و سوم سمت راست به صفر میل می کند چون $z=e^{j\omega T}$)

$\bar{a}=\frac{G(e^{-j\omega T})}{2j}$

* اگر تعریف کنیم :

$G(e^{j\omega T})=Me^{j\theta} \longrightarrow G(e^{-j\omega T})=Me^{-j\theta} \longrightarrow X(z)=\frac{Me^{j\theta}}{2j}\frac{z}{z-e^{j\omega T}}-\frac{Me^{-j\theta}}{2j}\frac{z}{z-e^{-j\omega T}}+$ جملات $G(z)$

$\frac{M}{2j}\left(\frac{e^{j\theta}z}{z-e^{j\omega T}}-\frac{e^{-j\theta}}{z-e^{-j\omega T}}\right)+$ (جملات ناشی از $G(z)$) $\longrightarrow$

عکس تبدیل Z $\longrightarrow x(kT)=\frac{M}{2j}(e^{jk\omega T}e^{j\theta}-e^{-jk\omega T}e^{-j\theta})+\mathcal{Z}^{-1}$ (جملات ناشی از $G(z)$) $\longrightarrow$

← ازآنجا که جملات ناشی از $\mathcal{Z}^{-1}(G(z))$ درنهایت به صفر میل می کند، با فرض $G(z)$ پایدار درحالت دائمی داریم :

$$x_{ss}(kT)=\frac{M}{2j}\left(e^{j(k\omega T+\theta)}-e^{-j(k\omega T+\theta)}\right)=M\sin(k\omega T+\theta)$$

* که در آن (M) بهره سیستم گسسته، در معرض ورودی سینوسی و θ فاز تغییریافته پاسخ سینوسی نسبت به ورودی سینوسی است:

$$\left.\begin{array}{l} M = M(\omega) = |G(e^{j\omega T})| \\ \theta = \theta(\omega) = \measuredangle G(e^{j\omega T}) \end{array}\right\} Z = e^{j\omega_k T}$$

مثال: برای معادلات ذیل دامنه و فاز آن را بدست آورید.

$$x(kT) = u(kT) + a\,x((k-1)T) \quad \begin{cases} 0 < a < 1 \\ u(kT) = A \sin \omega T k \end{cases}$$

$$X(z) = U(z) + a z^{-1} X(z) \longrightarrow$$

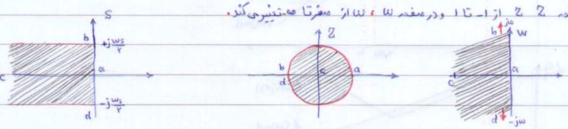
$$G(z) = \frac{X(z)}{U(z)} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} \xrightarrow{z \to e^{j\omega T}} G(e^{j\omega T}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega T}} \longrightarrow \frac{1}{1 - a\cos\omega T + j\sin\omega T} \longrightarrow$$

$$|G(e^{j\omega T})| = M = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2 - 2a\cos\omega T}} \qquad \measuredangle G(j\omega T) = \theta = -\tan\frac{a\sin\omega T}{1 - a\cos\omega T}$$

* پس از شناختن تابع پاسخ فرکانسی گسسته، موضوع دیگری با بدست آوردن قرار گیرد: در حوزه پیوسته برای سیستمهای خطی پاسخ فرکانسی را بررسی کرده و مثلاً به صورت نمودار بود (Bode) یا امثال آن را رسم و تحلیل می‌کنیم در تبدیل Z که ناحیه پایداری دایره واحد است قواعد به صورت متفاوت در نظر گرفته می‌شود.

- برای استفاده از روشهای قدیمی (مورد استفاده در سیستمهای خطی پیوسته) به کمک تبدیل دوخطی نخست سیستم را به حوزه دیگری که شباهت به حوزه S دارد برده و سپس این حوزه را نمودار بود یا انواع دیگری را رسم می‌کنیم، تبدیل دوخطی به صورت $\left(Z = \dfrac{1 + \frac{T}{2}w}{1 - \frac{T}{2}w}\right)$ و $\left(w = \dfrac{2}{T}\,\dfrac{Z-1}{Z+1}\right)$ است این تبدیل نوار اصلی حوزه S را مجدداً به نیم صفحه سمت چپ حوزه (w) انتقال می‌دهد.

(+) توجه شود که مبدأ مختصات Z به $\left(w = \frac{-2}{T}\right)$ در صفحه w تصویر می‌شود، همچنین توجه شود که در صفحه S، ω از 0 تا $\frac{\omega_s}{2}$ در صفحه Z، Z از -1 تا 1 و در صفحه w، ω از صفر تا ∞ تغییر می‌کند.

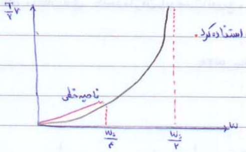


* رابطهٔ بین V (بخش موهومی W) و ω (فرکانس حوزه پیوسته) چنین است:

$$* \; W\Big|_{w=jv} = jv = \frac{2}{T}\,\frac{z-1}{z+1}\Big|_{z=e^{j\omega T}} \longrightarrow \frac{2}{T}\,\frac{e^{j\omega T}-1}{e^{j\omega T}+1} \longrightarrow \frac{2}{T}\,\frac{e^{j\omega\frac{T}{2}}-e^{-j\omega\frac{T}{2}}}{e^{j\omega\frac{T}{2}}+e^{-j\omega\frac{T}{2}}} \longrightarrow$$

$$\frac{2}{T}\,j\tan\frac{\omega T}{2} \longrightarrow v = \frac{2}{T}\tan\frac{\omega_s T}{2}$$

(پهنای باند حوزه W)



ب) اگر ωT خیلی کوچک باشد (ω=v) را داریم، اما در مقادیر بالاتر باید از رابطهٔ فوق استفاده کرد.

$$\lim_{\omega\to 0} G(\omega) = \lim_{s\to 0} G(s)$$

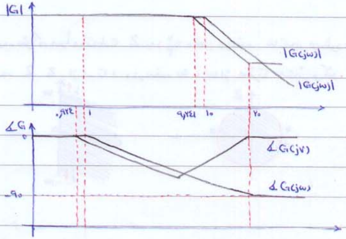
مثال: پاسخ فرکانسی سیستم ذیل را بدست آورید: (T=۰٫۱ s)

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\delta T} \longrightarrow \underbrace{\boxed{\frac{1-e^{-Ts}}{s}} \longrightarrow \boxed{\frac{10}{s+10}}}_{G(s)} \longrightarrow y(t)$$

$$* \; G(z) = Z\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{10}{s+10}\right) \longrightarrow (1-z^{-1})\,Z\left(\frac{10}{s(s+10)}\right) \longrightarrow \frac{0.6321}{z-0.3679}$$

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} \longrightarrow \frac{1+0.05w}{1-0.05w} \longrightarrow G(w) = 9.241\,\frac{1-0.05w}{w+9.241}$$

* توجه شود که قطب در صفحه S در ۱۰- بود که در صفحه W به ۹٫۲۴۱- منتقل شده است، اما در حوزهٔ W صفر داریم که در حوزهٔ S صفری وجود ندارد.



Subject . Year. Month. Day.

مثال: اگر بخواهیم برای سیستم مثال قبل کنترل کننده ای طراحی کنیم که زمان نشست بهتر از ۰٫۲s و (۵٪ > PO) و خطای ماندگار بهتر از ۰٫۲ باشد آن را طراحی کنید؛ $w_d \simeq 5$

$$t_s = \frac{4}{\sigma} = 0.2 \longrightarrow \sigma \simeq 20 \rightarrow w_d = 5 \longrightarrow w_n = 20\sqrt{2}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad f_s = \frac{5 w_n}{2\pi} \longrightarrow f_s = 22.5\,Hz \longrightarrow t_s = 0.044^{s}$$

$$Z\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\,\frac{10}{s+10}\right) \longrightarrow \frac{0.3585}{z-0.6415} \;;\; z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} \longrightarrow G(w) = 9.8377\,\frac{1-0.022w}{w+9.8377}$$

* برای تثبیت پهنای باند در سیستم تبدیل یافته $\measuredangle G(jw) = PM$ موجود $G(jw) = \frac{10}{20\sqrt{2}+10} = 0.2412 \quad k = \frac{1}{0.2412}$

$$\nu = \frac{2}{T}\tan\frac{wT}{2} \longrightarrow \nu = 32.7^{\circ}$$

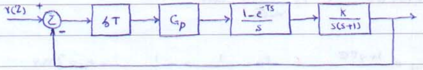
ب) برای بهره فرکانس $\nu = 32.7^{\circ}$ بدست می آید $\frac{1}{k} = 2.8$ برای جبرانساز (Lead) در این شرایط ($PM = 70^{\circ}$) است که برای رسیدن به $PM = 80^{\circ}$ ($\varphi_m = 10^{\circ}$) داریم؛

$$\alpha = \frac{1+\sin\varphi_m}{1-\sin\varphi_m} \longrightarrow \alpha = 1.42 \;;\; \nu_m = 45 \longrightarrow T = \frac{1}{\nu_m\sqrt{\alpha}} \simeq 0.0256 \qquad w'_c = 70\alpha$$

$$j\nu \longrightarrow G(w) = \frac{1+\alpha T w}{1+Tw} \longrightarrow \frac{1+0.0376w}{1+0.0256w} \longrightarrow G(z) = \frac{2.1937z - 0.6937}{2.1937z - 0.1937}$$

نکته: شیب $20\,db/dec$ یعنی هرچه فرکانس تغییر کند به همان مقدار بهره نیز تغییر می کند.

مثال: در سیستم ذیل ($T = 0.2s$) در نظر گرفته شده است؛ کنترل کننده ای طراحی کنید که حد فاز را بهتر از 56° و حد بهره را $10db$ و ثابت خطای سرعت را نیز ($k_v \geq 2s$) در نظر بگیرید.



$$* \; G(z) = Z\left(\frac{1-e^{-Ts}}{s}\cdot\frac{k}{s(s+1)}\right) \longrightarrow (1-z^{-1})Z\left(\frac{k}{s^2(s+1)}\right) \longrightarrow 0.01873\,\frac{k(z+0.9356)}{(z-1)(z-0.8187)} \longrightarrow$$

$$z = \frac{1+\frac{T}{2}w}{1-\frac{T}{2}w} \longrightarrow \frac{1+0.1w}{1-0.1w} \;;\; G(w) = 0.00314\,\frac{k(300.6+w)(1-0.1w)}{w(0.997+w)} \longrightarrow \frac{k\left(\frac{w}{300.6}+1\right)\left(1-\frac{w}{10}\right)}{w\left(\frac{w}{0.997}+1\right)}$$

* اگر $G_p(w) = \dfrac{1+w/\alpha}{1-w/\beta}$

$$* \; G_p(w)\,G(w) = \frac{1+w/\alpha}{1-w/\beta}\;\frac{k\left(\frac{w}{300.6}+1\right)\left(1-\frac{w}{10}\right)}{w\left(\frac{w}{0.997}+1\right)}$$

چون

$$k_v = \lim_{w\to 0} w\,G_p(w)\,G(w) \longrightarrow k = 2$$

* از روی تابع انتقال نقطه بهره واحد : $PM = -162 + 180 = 18^\circ$

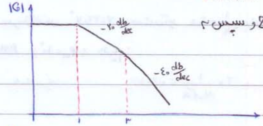
$\varphi_m = 50 - 18 \simeq 32^\circ$ (درفرکانس ۲ از)

$$G_p(w) = \frac{1+\frac{w}{0.997}}{1+\frac{w}{3.327}} \longrightarrow G_p(z) = 2.718\,\frac{z-0.8187}{z-0.5071}$$

مثال : برای تابع انتقال داده شده یک طراحی انجام دهید.

$G(s) = \frac{1}{(s+1)(s+3)}$ $\quad t_s = 2^s \longrightarrow \sigma = 2$; $P.O = \%50 \longrightarrow w_d = 5$

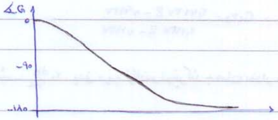
$(e_{ss} \le \%2)$; $w_n = \frac{\sigma}{\zeta} \simeq 2\sqrt{2}\ Hz$



»البته این برای نمونه در حوزه S است که باید حتماً اول به حوزه Z و سپس به حوزه w رفته و مراحل را انجام دهیم«

$$G(j2\sqrt{2}) = \frac{1}{(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}+3)} \simeq 0.0808$$

$$K = \frac{1}{0.0808} \simeq 12.37$$



$$\angle G(jw) = 0 - \tan^{-1}2\sqrt{2} - \tan^{-1}\frac{2\sqrt{2}}{3} + 180 \simeq 66^\circ$$

(مطلوب) $\varphi_m \longrightarrow 70 - 66 \simeq 4$ $\quad w_m = w_n \cdot \varphi_m$

$$\alpha = \frac{1+\sin 4^\circ}{1-\sin 4^\circ} \longrightarrow w_m = 1.15 \times 2\sqrt{2} \longrightarrow T = \frac{1}{w_m\sqrt{\alpha}} \simeq 0.2866$$

$$G_{Lead} = \frac{1+\alpha ts}{1+ts} \longrightarrow G_{Lead} = \frac{1+0.325}{1+0.286s}\ ;\ e_{ss} = \frac{1}{1+k_p} \simeq \frac{1}{1+4.1} \longrightarrow e_{ss} \simeq \%19.6$$

(موردنیاز) $G_1 = \frac{49}{4.1} \simeq 12$ $\quad G_{lag} = \frac{s+\beta}{s+k} \longrightarrow \beta = \frac{1}{0.32} \times 0.1 \simeq 0.3125$; $k \simeq \frac{0.3125}{12} \simeq 0.026$

نکته: درصورتی که (k) افزایش یابد باعث افزایش همه مقادیر می‌شود، درصورتی که لغای داردباعث افزایش پهنای باند و افزایش سرعت شود که اساساً نیاز نیست و در بعضی موارد نیز مضر است.

خلاصه:
- سرعت ← پهنای باند ← k
- حالت گذرا ← جهش ← lead
- خطای حالت دائم ← lag

* کنترل دیجیتال با استفاده از (MATLAB):

۱) با استفاده از دستور (SISO tool) می توان نمودار و سیستم کنترل خطی و غیرخطی تک ورودی و تک خروجی را نمایش داد.

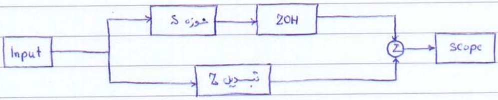
۲) در قسمت (Control Architecture) انواع مختلف نمونه طراحی اولیه وجود دارد.

۳) در قسمت (System Data) می توان برنامه ها و تابع تبدیلهایی که قبلاً طراحی شده و در (Workspace) وجود دارد را در این قسمت قرار داد.

۴) در قسمت (Compensater Editor) می توان بهره سیستم را مشخص کرد.

نکته: برای قرار دادن صفر و قطب برای پهنای باند مشخص کافیست که صفر را قبل از پهنای باند و قطب را بعد از پهنای باند قرار دهیم.

نکته: بهتر است در پروژه های ارائه شده هر دو حالت حوزه S و Z باهم مقایسه شوند چرا که در این صورت صحت عملکرد مشهود است.



نکته: در سیستمهای گسسته فرکانس تنها تا ($\frac{\omega_s}{2}$) موجود است و از آن به بعد مقدار صفر است؛ و دستور (c2d) تبدیل پیوسته به گسسته است.